



การคำนวณศักย์ไฟฟ้าที่รางระหว่างสถานีจ่ายกำลังไฟฟ้าขับเคลื่อนสำหรับระบบรถไฟฟ้ากระแสตรง RAIL POTENTIAL CALCULATION BETWEEN TRACTION SUBSTATIONS FOR DC RAILWAY SYSTEMS

ทวัช ชูชิต¹ และธนัชชัย กุลวรวานิชพงษ์²

^{1,2}สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อหาศักย์ไฟฟ้าที่รางในระบบรถไฟฟ้าขับเคลื่อนที่มีสถานีจ่ายกำลังไฟฟ้าขับเคลื่อนสองสถานี เนื่องจากศักย์ไฟฟ้าที่รางและแรงดันไฟฟ้าที่สถานีไฟฟ้าขับเคลื่อนเป็นสิ่งสำคัญเพื่อให้แน่ใจว่าอุปกรณ์ที่สถานีไฟฟ้า ความปลอดภัยของผู้โดยสารและการป้องกัน โครงสร้างพื้นฐานของรถไฟอยู่ภายใต้การกัดกร่อนเป็นไปตามที่มาตรฐานกำหนดไว้หรือไม่ ในบทความนี้แสดงการคำนวณโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบพื้นฐานและแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อย่างง่ายเพื่อวิเคราะห์กระแสและศักย์ไฟฟ้าที่ราง นอกจากนี้ยังได้แสดงสมการการคำนวณอย่างง่ายสำหรับการประมาณศักย์ไฟฟ้าที่รางและแรงดันไฟฟ้าที่สถานีไฟฟ้าเพื่อให้ง่ายแก่การนำไปใช้ในการวิเคราะห์และประเมินกระแสรั่วไหลอีกด้วย สมการการคำนวณทางคณิตศาสตร์นี้ยังได้ตรวจสอบความถูกต้องแล้วว่าเป็นไปตามสมการในมาตรฐาน EN 50122-2

คำสำคัญ: ศักย์ไฟฟ้าที่ราง, ระบบรถไฟฟ้ากระแสตรง, กระแสรั่วไหล

ABSTRACT

This paper presents a mathematical model for rail potential calculation in the DC electrified railway with two traction substations. The rail potential and traction substation voltage are essential for supply equipment, passenger safety and railway infrastructure protection against corrosion, all of which must comply with requirements and standards. The classical and simplified mathematical models are described in this study to analyses the rail potential and current. In addition, the simplified equations for estimating the rail potential and traction substation voltage are derived to simply determine the stray current. These equations can be used to analyses and calculate the stray current based on the approximate rail potential. They are also validated according to the equations in EN 50122-2.

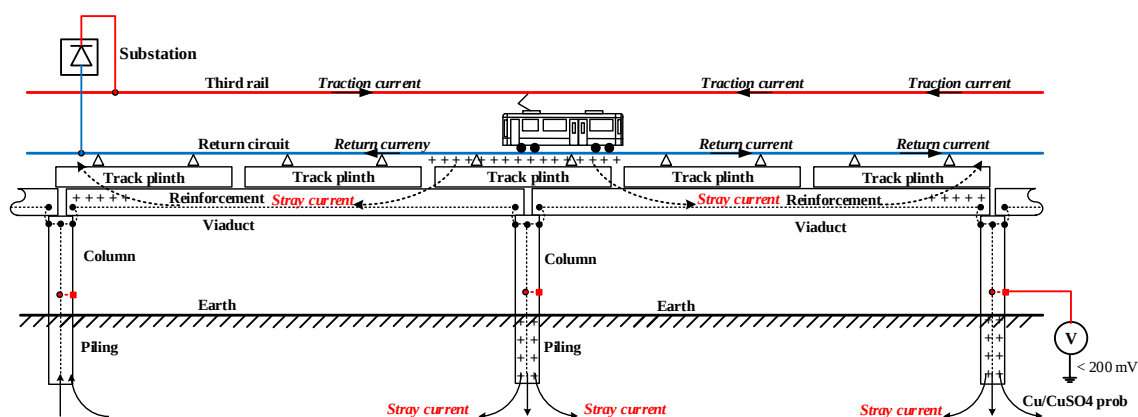
KEYWORDS: rail potential, dc railway systems, stray current

1. บทนำ

ประมาณครึ่งหนึ่งของระบบรถไฟฟ้าทั่วโลกใช้สถานีไฟฟ้าขับเคลื่อนกระแสตรงใช้พลังงาน (MW) ในการขับเคลื่อนรถไฟฟ้าสูงที่แรงดันไฟฟ้า 750 - 3000 V ทำให้เกิดการไหลเวียนของกระแสไฟฟ้าสูง โดยกระแสไฟฟ้าขับเคลื่อน (traction current)

ของรถไฟจะไหลกลับไปยังสถานีจ่ายกำลังไฟฟ้าขับเคลื่อน (substations) ผ่านรางวิ่ง (running rails) ส่วนหนึ่งของกระแสย้อนกลับ (return current) จะไหลไปยังโครงสร้างเสริมแรง (reinforcement structure) และไหลลงดิน (earth) ผ่านโครงสร้างทางยกระดับ (viaduct) หรืออุโมงค์ (tunnel) และไหลกลับไปยังสถานีไฟฟ้าผ่านพื้นดินดังแสดงในรูปที่ 1 [1-10]

กระแสย้อนกลับที่อยู่ภายในโครงสร้างเสริมแรงและโครงสร้างยกระดับหรืออุโมงค์ในบริเวณสถานีไฟฟ้าขับเคลื่อนจะไหลกลับไปยังรางวิ่งและไหลกลับไปยังระบบการต่อลงดิน (grounding systems) ของสถานีไฟฟ้างดังแสดงในรูปที่ 1 โดยที่กระแสย้อนกลับที่ไหลออกจากรางวิ่งเป็นสาเหตุหลักของกระแสรั่วไหลก่ดกร่อนในส่วนประกอบที่เป็นโลหะที่มีการสัมผัสกับดิน เช่น ท่อลำเลียงน้ำมัน โครงสร้างพื้นฐานเหล็กเสริมแรงของอาคารหรือเสาโครงสร้างอุโมงค์เสริมแรง สะพานและทางยกระดับ [1 - 10] โดยเรียกกระแสดังกล่าวนี้ว่ากระแสรั่วไหล (stray current) ด้วยเหตุนี้จึงต้องพิจารณาปริมาณกระแสรั่วไหลในระบบรถไฟฟ้ากระแสตรง

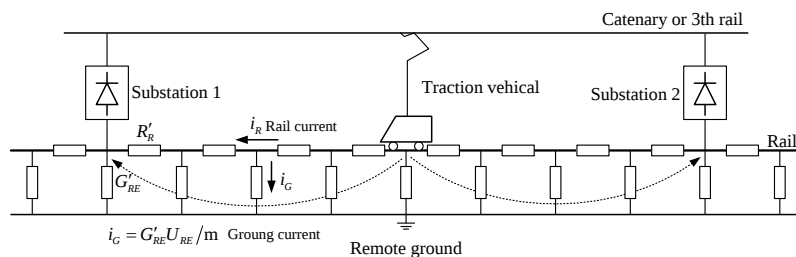


รูปที่ 1 เส้นทางไหลของกระแสย้อนกลับและกระแสรั่วไหลในระบบรถไฟฟ้ากระแสตรง

การวิเคราะห์และประเมินกระแสรั่วไหลจึงเป็นสิ่งสำคัญเพื่อให้แน่ใจว่าอุปกรณ์ ความปลอดภัยของผู้โดยสารและการป้องกัน โครงสร้างพื้นฐานของรถไฟอยู่ภายใต้การก่ดกร่อนเป็นไปตามที่มาตรฐานกำหนดไว้หรือไม่ จากการศึกษาผลกระทบของกระแสรั่วไหลก่ดกร่อนในระบบรถไฟฟ้ากระแสตรงได้มีการแสดงวิธีการการคำนวณและจำลองผลดัง เช่น การจำลองกระแสรั่วไหลโดยเทคนิคการเชื่อมต่อลงดินของโครงสร้างทางยกระดับโดยใช้แบบจำลองตัวต้านทานของวัสดุ [2, 10] การคำนวณแรงดันไฟฟ้าที่รางแทนการคำนวณกระแสรั่วไหลโดยตรง [3] วิธีการคำนวณนี้เป็นที่นิยมและนำมาใช้ในการประเมินกระแสรั่วไหล การคำนวณกระแสรั่วไหลในโครงสร้างอุโมงค์ที่มีสถานีไฟฟ้าขับเคลื่อนสองด้านเพื่อจ่ายไหลรถไฟที่อยู่ระหว่างสถานีไฟฟ้าขับเคลื่อนทั้งสอง [4] โดยใช้เทคนิคแบบจำลองสายส่ง การคำนวณการไหลของกระแสไฟฟ้าและแรงดันไฟฟ้าในโครงสร้างอุโมงค์ รวมถึงกระแสไฟฟ้าและศักย์ไฟฟ้าที่รางโดยใช้วิธีการพารามิเตอร์แบบกระจายและแบบกลุ่ม [5] ซึ่งการใช้พารามิเตอร์กระจายเป็นการคำนวณโดยใช้เทคนิคแบบจำลองสายส่ง ส่วนพารามิเตอร์แบบแบบกลุ่มเป็นการคำนวณโดยใช้เทคนิค STM (sparse tableau method) โดยแบบจำลองทั้งสองอยู่บนระบบจ่ายกำลังไฟฟ้าสองด้านที่มีการพิจารณาต่อโลหะใต้ดิน หลังจากนั้นได้มีการพัฒนาแบบจำลองโดยใช้ MATLAB GUI ด้วยวิธีการคำนวณพารามิเตอร์แบบกลุ่ม [6] โดยใช้เทคนิค STM เช่นเดียวกับบทความที่ผ่านมา และการจำลองกระแสรั่วไหลโดยใช้โปรแกรม CDEGS (current distribution, electromagnetic fields, grounding, and soil structure

analysis) เปรียบเทียบกับ โปรแกรม MATLAB&Simulink ในกรณีที่มีความแตกต่างกันของชั้นดิน [7] ซึ่งเป็นการพิจารณากระแสรั่วไหลเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงสภาพความนำไฟฟ้าของดินในแต่ละชั้น นอกจากนั้นยังมีการคำนวณกระแสไฟฟ้าและแรงดันไฟฟ้าที่ราง รวมทั้งการวิเคราะห์แรงดันไฟฟ้าที่รางตามแนวความยาวรางและผลกระทบระยะไกลในสถานะทำงานปกติและลัดวงจรด้วยระบบจ่ายกำลังไฟฟ้าด้านเดียวเมื่อมีรถไฟวิ่งขบวนเดียวและแบบจำลองยังได้พิจารณาความยาวรางบริเวณด้านข้างของสถานีไฟฟ้าขับเคลื่อน [8, 9] โดยใช้เทคนิคแบบจำลองสายส่ง

ดังนั้นในงานวิจัยนี้จะนำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สามารถคำนวณกระแสไฟฟ้าและศักย์ไฟฟ้าที่รางในกรณีระบบจ่ายกำลังไฟฟ้าสองด้านซึ่งมีสถานีไฟฟ้าขับเคลื่อน 2 สถานีและรถไฟ 1 ขบวนอยู่ระหว่างสถานีไฟฟ้าขับเคลื่อนทั้งสองและพิจารณาความยาวรางบริเวณด้านข้างของสถานีไฟฟ้าขับเคลื่อนดังแสดงในรูปที่ 2 ซึ่งแบบจำลองนี้ยังไม่มีเผยแพร่มาก่อน



รูปที่ 2 ระบบจ่ายกำลังไฟฟ้าสองด้าน

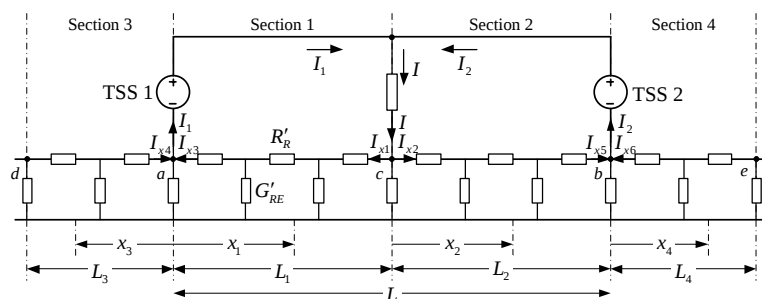
2. ระบบรถไฟกระแสตรง

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการคำนวณกระแสรั่วไหลจะต้องสามารถคำนวณหาศักย์ไฟฟ้าที่ราง กระแสไฟฟ้าที่ราง และกระแสรั่วไหล แสดงได้ดังรูปที่ 2 ได้แสดงระบบจ่ายกำลังไฟฟ้าสองด้านสำหรับสถานีไฟฟ้าย่อยที่ไม่มีการต่อลงดินทางไฟฟ้า (electrically floating substation) [1, 9, 10] ดังนั้นแบบจำลองที่นำเสนอจะเป็นการจ่ายกระแสไฟฟ้าสองด้านให้แก่รถไฟขบวนเดียว โดยมีรายละเอียดดังแสดงในรูปที่ 2

3. การคำนวณศักย์ไฟฟ้าที่รางของรถไฟกระแสตรง

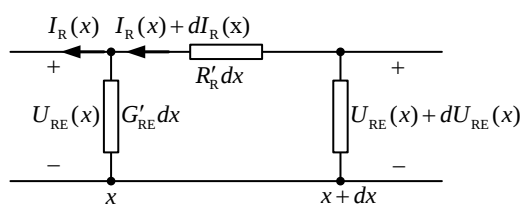
3.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบพื้นฐาน

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบพื้นฐาน (Classical mathematical model: CMM) จะพิจารณาจากแบบจำลองการส่งจ่ายกำลังไฟฟ้าขับเคลื่อนให้แก่รถไฟประกอบไปด้วย สถานีจ่ายกำลังไฟฟ้า รถไฟ ความต้านทานรางต่อหน่วยความยาว (R'_R) และความนำไฟฟ้าต่อหน่วยความยาว (G'_RE) เพื่อให้ง่ายแก่การคำนวณจากรูปที่ 2 สามารถแบ่งช่วงในการคำนวณจะแบ่งออกเป็น 4 ส่วน ได้แก่ ส่วนที่ 1 ส่วนที่ 2 ส่วนที่ 3 และ ส่วนที่ 4 ดังแสดงในรูปที่ 3 เมื่อ I_1 I_{x3} I_{x4} และ L_1 คือ กระแสที่ไหลเข้า – ออกที่จุด a และความยาวที่พิจารณาในส่วนที่ 1 ตามลำดับ I_{x1} I_{x2} และ L_2 คือ กระแสที่ไหลเข้า – ออกที่จุด c และความยาวที่พิจารณาในส่วนที่ 2 ตามลำดับ I_2 I_{x5} และ I_{x6} คือ กระแสที่ไหลออกเข้า – ออกที่จุด b และ ตามลำดับและ L_3 และ L_3 คือ ความยาวที่พิจารณาในส่วนที่ 3 และ 4 ตามลำดับ



รูปที่ 3 การแบ่งช่วงการคำนวณกระแสไฟฟ้าและแรงดันไฟฟ้า

โดยพื้นฐานแล้ว การคำนวณแรงดันและกระแสไฟฟ้าที่รางสามารถพิจารณาโดยใช้แบบจำลองสายส่งซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 4 และมีรายละเอียดในการคำนวณปริมาณดังกล่าวได้ดังต่อไปนี้



รูปที่ 4 การกระจายตัวของแรงดันและกระแสไฟฟ้าที่รางวิ่ง

จากรูปที่ 4 จากกฎแรงดันไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ (Kirchoff voltage law) [1, 9, 11, 12] จะได้ว่า

$$-U'_{RE}(x) - [I_R(x) + dI_R(x)]R'_R dx + U'_{RE}(x) + dU'_{RE}(x) = 0 \quad (1)$$

เมื่อ $U'_{RE}(x)$ คือ แรงดันไฟฟ้าที่รางเทียบกับดิน

$I_R(x)$ คือ กระแสไฟฟ้าที่ราง

ดังนั้น

$$dU'_{RE}(x) = [I_R(x) + dI_R(x)]R'_R dx \quad (2)$$

เมื่อ $dI_R(x) = 0$ จะได้ว่า

$$\frac{dU'_{RE}(x)}{dx} = I_R(x)R'_R \quad (3)$$

จากกฎกระแสไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ (Kirchoff current law) เป็นไปตามสมการ

$$I_R(x) + dI_R(x) = I_R(x) + U_{RE}(x)G'_{RE} dx \quad (4)$$

ดังนั้น

$$\frac{dI_R(x)}{dx} = U_{RE}(x)G'_{RE} \quad (5)$$

อนุพันธ์สมการที่ (5) เทียบกับ x เขียนได้ดังสมการ

$$\frac{d^2 I_R(x)}{dx^2} = \frac{dU_{RE}(x)}{dx} G'_{RE} \quad (6)$$

นำสมการที่ (3) แทนลงในสมการที่ (6) จะได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\frac{d^2 I_R(x)}{dx^2} - \alpha^2 I_R(x) = 0 \quad (7)$$

เมื่อ $\alpha = \sqrt{R'_R G'_{RE}}$ และผลเฉลยทั่วไปของสมการอนุพันธ์อันดับสองเป็นไปตามสมการต่อไปนี้

$$I_R(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} \quad (8)$$

หลังจากนั้นทำการหาค่าคงที่ A และ B ในแต่ละส่วน รายละเอียดและแนวทางการหาคำตอบสามารถพิจารณาได้จากขอบเขตของกระแสไฟฟ้าในแต่ละส่วนที่ได้พิจารณา โดยมีรายละเอียดในแต่ละส่วนดังต่อไปนี้

ส่วนที่ 1

การหาขอบเขตของกระแสไฟฟ้าในส่วนที่ 1 สามารถพิจารณาได้จากแบบจำลองในรูปที่ 3 (section 1) เมื่อรถไฟเคลื่อนที่เป็นระยะ x_1 จากจุด a ไปยังจุด c เป็นระยะทาง L_1 ดังนั้นขอบเขตของกระแสไฟฟ้าในส่วนที่ 1 โดยกำหนดให้ที่ $x_1 = 0$ (ที่จุด a) และที่ $x_1 = L_1$ (ที่จุด c) และนำค่าดังกล่าวแทนในสมการที่ (8) สามารถเขียนสมการกระแสไฟฟ้าที่จุด a และจุด c ได้ดังสมการที่ (9) และ (10) ตามลำดับ

$$I'_R(0) = Ae^{\alpha(0)} + Be^{-\alpha(0)} = A + B \quad (9)$$

$$I'_R(L_1) = Ae^{\alpha L_1} + Be^{-\alpha L_1} \quad (10)$$

เมื่อ $I'_R(0) = I_{x3}$ และ $I'_R(L_1) = I_{x1}$ จากสมการดังกล่าวจะพบว่าคำตอบอยู่ในรูปของตัวแปร A และ B ซึ่งคำนวณได้ดังต่อไปนี้

$$A = \frac{I_{x1} - I_{x3}e^{-\alpha L_1}}{e^{\alpha L_1} - e^{-\alpha L_1}} \text{ และ } B = \frac{-I_{x1} + I_{x3}e^{\alpha L_1}}{e^{\alpha L_1} - e^{-\alpha L_1}}$$

นำค่า A และ B แทนในสมการที่ (8) จะได้เป็นคำตอบของกระแสที่รางในส่วนที่ 1 ดังสมการ

$$I'_R(x) = \frac{I_{x1} \sinh(\alpha x) + I_{x3} \sinh(\alpha(L_1 - x))}{\sinh(\alpha L_1)} \quad (11)$$

จากสมการที่ (5) และสมการที่ (11) สามารถคำนวณแรงดันไฟฟ้าที่รางได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} U'_{RE}(x) &= \frac{1}{G'_{RE}} \frac{dI'_R(x)}{dx} = \frac{1}{G'_{RE}} \left(\frac{\alpha I_{x1} \cosh(\alpha x) + (-\alpha) I_{x3} \cosh(\alpha(L_1 - x))}{\sinh(\alpha L_1)} \right) \\ &= Z_C \left(\frac{I_{x1} \cosh(\alpha x) - I_{x3} \cosh(\alpha(L_1 - x))}{\sinh(\alpha L_1)} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

โดยที่ $Z_C = \alpha/G'_{RE}$ หรือ $Z_C = \sqrt{R'_R/G'_{RE}}$ ดังนั้นสามารถคำนวณแรงดันไฟฟ้าที่ราง U'_a และ U'_c ที่จุด a และ c ในรูปที่ 3 ได้ดังต่อไปนี้

$$U'_a = U'_{RE}(0) = Z_C \left(\frac{I_{x1} - I_{x3} \cosh(\alpha L_1)}{\sinh(\alpha L_1)} \right) \quad (13)$$

$$U'_c = U'_{RE}(L_1) = Z_C \left(\frac{I_{x1} \cosh(\alpha L_1) - I_{x3}}{\sinh(\alpha L_1)} \right) \quad (14)$$

ส่วนที่ 2

การพิจารณาที่ขอบเขตของกระแสไฟฟ้าในส่วนที่ 2 จะพิจารณาในกรณีที่รถไฟเคลื่อนที่เป็นระยะ x_2 จากจุด c ไปยังจุด b เป็นระยะทาง L_2 สามารถคำนวณได้เช่นเดียวกันกับในส่วนที่ 1 ได้ดังสมการที่ (15) และ (16)

$$I''_R(0) = I_{x2} = A + B \quad (15)$$

$$I''_R(L_2) = I_{x4} = Ae^{\alpha L_2} + Be^{-\alpha L_2} \quad (16)$$

จากสมการที่ (16) และ (17) สามารถคำนวณ A และ B ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$A = \frac{-I_{x2}e^{-\alpha L_2} + I_{x4}}{e^{\alpha L_2} - e^{-\alpha L_2}} \text{ และ } B = \frac{I_{x2}e^{\alpha L_2} - I_{x4}}{e^{\alpha L_2} - e^{-\alpha L_2}}$$

จะได้เป็นคำตอบของกระแสและแรงดันไฟฟ้าที่รางในส่วนที่ 2 ดังสมการที่ (17) และ (18) ตามลำดับ

$$I''_R(x) = \frac{I_{x2} \sinh(\alpha(L_2 - x)) + I_{x4} \sinh(\alpha x)}{\sinh(\alpha L_2)} \quad (17)$$

$$U''_{RE}(x) = Z_C \left(\frac{-I_{x2} \cosh(\alpha(L_2 - x)) + I_{x4} \cos(\alpha x)}{\sinh(\alpha L_2)} \right) \quad (18)$$

ดังนั้นสามารถคำนวณแรงดันไฟฟ้าที่ราง U''_c และ U''_b ที่จุด c และ b ได้ดังนี้

$$U''_c = U''_{RE}(0) = I_{x2} Z_C \left(\frac{-I_{x2} \cosh(\alpha L_2) + I_{x4}}{\sinh(\alpha L_2)} \right) \quad (19)$$

$$U''_b = U''_{RE}(L) = I_{x2} Z_C \left(\frac{-I_{x2} + I_{x4} \cos(\alpha L_2)}{\sinh(\alpha L_2)} \right) \quad (20)$$

ส่วนที่ 3

การพิจารณาที่ขอบเขตของกระแสไฟฟ้าในส่วนนี้จะพิจารณาในกรณีที่รถไฟเคลื่อนที่เป็นระยะ x_3 จากจุด a ไปยังจุด d เป็นระยะทาง L_3 สามารถเขียนสมการกระแสไฟฟ้าที่จุด a และจุด d และกำหนดให้ L_3 มีระยะเป็นอนันต์จะทำให้ $I''_R(L_3) = 0$ ดังนั้นสามารถเขียนได้ดังสมการที่ (21) และ (22) ตามลำดับ

$$I''_R(0) = I_{x5} = A + B \quad (21)$$

$$I''_R(L_3) = 0 = Ae^{\alpha L_3} + Be^{-\alpha L_3} \quad (22)$$

แก้สมการด้านบนได้สมการ A และ B ดังต่อไปนี้

$$A = -I_{x5} \frac{e^{-\alpha L_3}}{e^{\alpha L_3} - e^{-\alpha L_3}} \quad \text{และ} \quad B = I_{x5} \frac{e^{\alpha L_3}}{e^{\alpha L_3} - e^{-\alpha L_3}}$$

ดังนั้นกระแสและแรงดันไฟฟ้าที่รางในส่วนที่ 3 ได้ดังสมการ

$$I''_R(x) = I_{x5} \frac{\sinh(\alpha(L_3 - x))}{\sinh(\alpha L_3)} \quad (23)$$

$$U'''_{RE}(x) = -I_{x5} Z_C \left(\frac{\cosh(\alpha(L_3 - x))}{\sinh(\alpha L_3)} \right) \quad (24)$$

สามารถคำนวณแรงดันไฟฟ้าระหว่างรางวิ่งกับดิน U'''_a ที่จุด a ได้ดังนี้

$$U'''_a = U'''_{RE}(0) = -I_{x5} Z_C \left(\frac{\cosh(\alpha L_3)}{\sinh(\alpha L_3)} \right) \quad (25)$$

ส่วนที่ 4

การพิจารณาที่ขอบเขตของกระแสไฟฟ้าในส่วนที่ 4 จะพิจารณาในกรณีที่รถไฟเคลื่อนที่เป็นระยะ x_4 จากจุด b ไปยังจุด e เป็นระยะทาง L_4 สามารถคำนวณได้เช่นเดียวกันกับในส่วนที่ 3 ได้ดังสมการที่ (26) และ (27) ตามลำดับ

$$I_R^{IV}(0) = I_{x6} = A + B \quad (26)$$

$$I_R^{IV}(L_4) = L_4 = Ae^{\alpha L_4} + Be^{-\alpha L_4} \quad (27)$$

แก้สมการด้านบนได้สมการ A และ B ดังต่อไปนี้

$$A = -I_{x6} \frac{e^{-\alpha L_4}}{e^{\alpha L_4} - e^{-\alpha L_4}} \quad \text{และ} \quad B = I_{x6} \frac{e^{\alpha L_4}}{e^{\alpha L_4} - e^{-\alpha L_4}}$$

ดังนั้นคำตอบของกระแสและแรงดันไฟฟ้าที่รางในส่วนที่ 4 แสดงได้สมการที่ (28) และ (29) ตามลำดับ

$$I_R^{IV}(x) = I_{x6} \frac{\sinh(\alpha(L_4 - x))}{\sinh(\alpha L_4)} \quad (28)$$

$$U_{RE}^{IV}(x) = -I_{x6} Z_C \left(\frac{\cosh(\alpha(L_4 - x))}{\sinh(\alpha L_4)} \right) \quad (29)$$

สามารถคำนวณแรงดันไฟฟ้าที่ราง U_b^{IV} ที่จุด b ได้ดังต่อไปนี้

$$U_b^{IV} = U_{RE}^{IV}(0) = -I_{x6} Z_C \left(\frac{\cosh(\alpha L_4)}{\sinh(\alpha L_4)} \right) \quad (30)$$

จากสมการเบื้องต้นจะพบว่าสมการของกระแสไฟฟ้าทั้งหมดจะติดตัวแปร I_{x1} I_{x2} I_{x3} I_{x4} I_{x5} และ I_{x6} โดยที่แรงดันที่โนด a b และ c จะมีค่าเท่ากัน นั่นคือ $U'_a = U''_a$ $U'_b = U''_b$ และ $U'_c = U''_c$ ดังแสดงในสมการที่ (31) – (33)

$$\left(I_{x1} \frac{1}{\sinh(\alpha L_1)} - I_{x3} \frac{\cosh(\alpha L_1)}{\sinh(\alpha L_1)} \right) + I_{x5} = 0 \quad (31)$$

$$\left(I_{x2} \frac{1}{\sinh(\alpha L_2)} - I_{x4} \frac{\cosh(\alpha L_2)}{\sinh(\alpha L_2)} \right) + I_{x6} = 0 \quad (32)$$

$$I_{x1} \frac{\cosh(\alpha L_1)}{\sinh(\alpha L_1)} - I_{x3} \frac{1}{\sinh(\alpha L_1)} = -I_{x2} \frac{\cosh(\alpha L_2)}{\sinh(\alpha L_2)} + I_{x4} \frac{1}{\sinh(\alpha L_2)} \quad (33)$$

กฎกระแสไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ที่โนด a b และ c ในรูปที่ 3 จะมีค่าดังสมการที่ (34) แสดงได้ดังนี้

$$I_1 = I_{x3} + I_{x5} \quad I_2 = I_{x4} + I_{x6} \quad \text{และ} \quad I = I_{x1} + I_{x2} \quad (34)$$

โดยที่

$$I_1 = \frac{L-L_1}{L} I = \frac{L_2}{L} I \quad \text{และ} \quad I_2 = \frac{L_1}{L} I \quad (35)$$

จากสมการที่ (31) – (34) สามารถเขียนใหม่ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$aI_{x1} - cI_{x3} + eI_{x5} = 0 \quad (36)$$

$$bI_{x2} - dI_{x4} + fI_{x6} = 0 \quad (37)$$

$$cI_{x1} - dI_{x2} - aI_{x3} + bI_{x4} = 0 \quad (38)$$

$$I_{x3} + I_{x5} = I_1 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} I = \frac{L_2}{L} I \quad (39)$$

$$I_{x4} + I_{x6} = I_2 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} I = \frac{L_1}{L} I \quad (40)$$

$$I_{x1} + I_{x2} = I \quad (41)$$

เมื่อ

$$a = \frac{1}{\sinh(\alpha L_1)} \quad b = \frac{1}{\sinh(\alpha L_2)} \quad c = \frac{1}{\tanh(\alpha L_1)} \quad d = \frac{1}{\tanh(\alpha L_2)} \quad \text{และ} \quad f = \frac{1}{\tanh(\alpha L_4)}$$

3.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์อย่างง่าย

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์อย่างง่าย (Simplified mathematical model: SMM) เป็นการประมาณค่าจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบพื้นฐาน เนื่องจากสมการเบื้องต้นของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบพื้นฐานมีความซับซ้อนค่อนข้างสูง โดยพิจารณาให้ L_3 และ L_4 มีค่าเป็นอนันต์ จะพบว่าพจน์ในสมการที่ (42) ของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบพื้นฐานมีค่าเป็น 1

$$\frac{\cosh(\alpha L_3)}{\sinh(\alpha L_3)} = 1, \quad \left(\frac{\cosh(\alpha L_4)}{\sinh(\alpha L_4)} \right) = 1 \quad (42)$$

จากสมการที่ (42) สามารถจัดรูปสมการที่ (31) – (34) ได้ดังนี้

$$aI_{x1} - (c+1)I_{x3} = -\frac{L_2}{L_1 + L_2} I \quad (43)$$

$$bI_{x2} - (d+1)I_{x4} = -\frac{L_1}{L_1 + L_2} I \quad (44)$$

$$cI_{x1} - dI_{x2} - aI_{x3} + bI_{x4} = 0 \quad (45)$$

$$I_{x1} + I_{x2} = I \quad (46)$$

เมื่อ

$$a = \frac{1}{\sinh(\alpha L_1)} \quad b = \frac{1}{\sinh(\alpha L_2)} \quad c = \frac{1}{\tanh(\alpha L_1)} \quad \text{และ} \quad d = \frac{1}{\tanh(\alpha L_2)}$$

4. การประเมินกระแสรั่วไหลในระบบรถไฟฟ้ากระแสดตรง

การประเมินกระแสรั่วไหลพิจารณาปริมาณของกระแสรั่วไหลและแรงดันไฟฟ้าระหว่างรางกับดินหรือศักย์ไฟฟ้าที่รางเป็นตัวบ่งชี้ว่าผ่านมาตรฐานหรือไม่

การใช้ปริมาณของกระแสรั่วไหลต่อหน่วยความยาวตามสมการที่ (5) สมการนี้เป็นตามมาตรฐาน EN 50122-2 โดยมีเงื่อนไขในการคำนวณว่าต้องพิจารณาที่ความหนาแน่นโดยเฉลี่ยของการจราจรบนสายรถไฟฟ้า ดังนั้นการพิจารณากระแสรั่วไหลต่อหน่วยความยาวนี้เป็นสิ่งสำคัญซึ่งจะชี้ให้เห็นว่าเป็นตามมาตรฐาน EN 50122-2 โดยค่าเฉลี่ยที่ยอมรับได้ว่าไม่เกิดการกักกร่อนในระบบรางในช่วงเวลา 25 ปี คือ 2.5 mA/m [13]

การใช้ปริมาณของแรงดันไฟฟ้าระหว่างรางกับดินเป็นวิธีการที่นิยมนำมาใช้เพราะสามารถวัดค่าได้ง่ายและสามารถวัดได้โดยตรง ตามมาตรฐาน EN 50122-1 แรงดันไฟฟ้าสูงสุดที่ยอมให้เข้าถึงได้จะต้องไม่เกิน 120 V ในเวลามากกว่า 300 s [14] จากสมการแรงดันไฟฟ้าระหว่างรางกับดินในส่วนที่ 1 (ในรูปที่ 3) จะมีค่าสูงที่สุดเมื่อรถไฟอยู่ที่ตำแหน่ง $x = L/2$ ดังนั้นจะทำให้ $L_1 = L_2 = L/2$ และ $I_{x3} = I_{x4}$ แล้วจะพบว่า $I_{x1} = I_{x2} = I/2$ สามารถคำนวณแรงดันไฟฟ้าที่จุด a b และ c ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$U_A'' = -I_{x5}Z_C = -\frac{I}{4}Z_C(1 - e^{-\alpha L/2})^2 \quad (47)$$

$$U_A' = U_B' = Z_C \left(\frac{I_{x1} - I_{x3} \cosh(\alpha L_1)}{\sinh(\alpha L_1)} \right) = -Z_C \frac{I}{4}(1 - e^{-\alpha L/2})^2 \quad (48)$$

$$U_C' = Z_C \left(\frac{I_{x1} \cosh(\alpha L/2) - I_{x3}}{\sinh(\alpha L/2)} \right) = \frac{I}{2}Z_C(1 - e^{-\alpha L/2}) \quad (49)$$

ดังนั้นจากสมการที่ (47) – (49) จะพบว่าสมการคำนวณอย่างง่าย (Simple calculation equation: SCE) ของการประมาณศักย์ไฟฟ้าสูงสุดที่รางแสดงได้ดังสมการที่ (50)

$$U_{RE} = \frac{I}{2} Z_C (1 - e^{-\alpha L/2}) \quad (50)$$

และการประมาณขนาดของแรงดันไฟฟ้าที่สถานีไฟฟ้าขับเคลื่อนแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$U_s = \frac{I}{4} Z_C (1 - e^{-\alpha L/2})^2 \quad (51)$$

จากสมการที่ (50) จะพบว่าสมการดังกล่าวมีค่าเหมือนกันกับสมการในมาตรฐาน EN 50122-2 ภาคผนวก C เมื่อ $\alpha = 1/L_C$ โดยที่ $L_C = 1/\sqrt{R'_R G'_R}$ เนื่องจากสมการที่ (50) เป็นสมการในการประมาณจะทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนได้ อย่างไรก็ตามสมการในแบบจำลองที่สร้างขึ้นสอดคล้องกับมาตรฐาน EN 50122-2 เมื่อคำนึงถึงเงื่อนไขเฉพาะของการใช้งานในภาคผนวก C

5. ผลการจำลอง

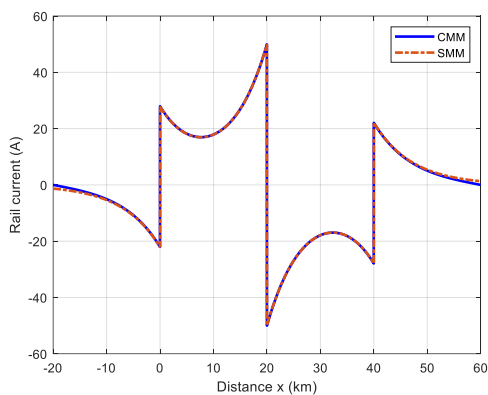
ในหัวข้อนี้ได้นำเสนอการจำลองสถานการณ์โดยทั่วไปของแบบจำลองทั้งสองเพื่อดูกราฟโดยทั่วไปของกระแสและศักย์ไฟฟ้าที่ราง โดยกำหนดให้ค่าความต้านทานของรางมีค่าเป็น 0.2 Ω/km ค่าความนำต่อหน่วยความยาวมีค่าเป็น 0.1 S/km ระยะทางที่พิจารณา 20 km และกระแสไฟฟ้าที่จ่ายให้แกรด์ 100 A และระยะด้านข้างเป็น 20 km ทั้งสองด้าน การจำลองผลสำหรับวงจรจ่ายกำลังไฟฟ้าสองด้านแสดงได้ดังรูปที่ 5 และ 6

จากผลการจำลองในรูปที่ 5 และ 6 เป็นการแสดงกราฟโดยทั่วไปของกระแสไฟฟ้าและศักย์ไฟฟ้าที่รางซึ่งจะมีแนวโน้มเดียวกันทั้งสองวิธีโดยรายละเอียดสำหรับระบบทดสอบด้วยพารามิเตอร์ที่สมจริงได้แสดงไว้ในหัวข้อถัดไป

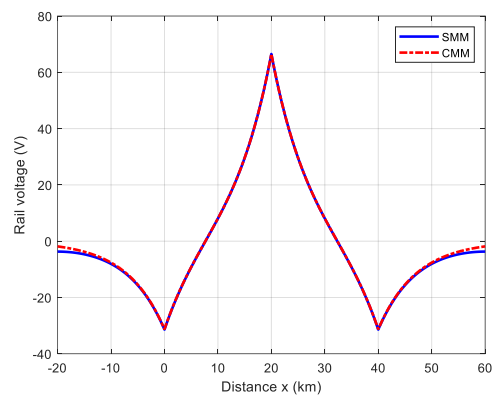
5.1 กรณีรถไฟหยุดอยู่ที่ตำแหน่งใด ๆ

ผลการจำลองของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบพื้นฐานและแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อย่างง่ายได้แสดงผลของกระแสไฟฟ้าและศักย์ไฟฟ้าที่รางสำหรับระบบจ่ายไฟ 3,000 V มีกำลังไฟฟ้าขับเคลื่อน 4 MW ความต้านทานต่อหน่วยความยาว 0.02 Ω/km ความนำไฟฟ้าต่อหน่วยความยาว 0.5 S/km ระยะระหว่างสถานีไฟฟ้าขับเคลื่อนทั้งสอง 12 km และ ความยาวรางด้านข้างของสถานีไฟฟ้าทั้งสอง 6 km [10] เมื่อรถไฟอยู่ที่ตำแหน่ง 3, 6 และ 9 km ดังแสดงในรูปที่ 7 และ 8 ตามลำดับ

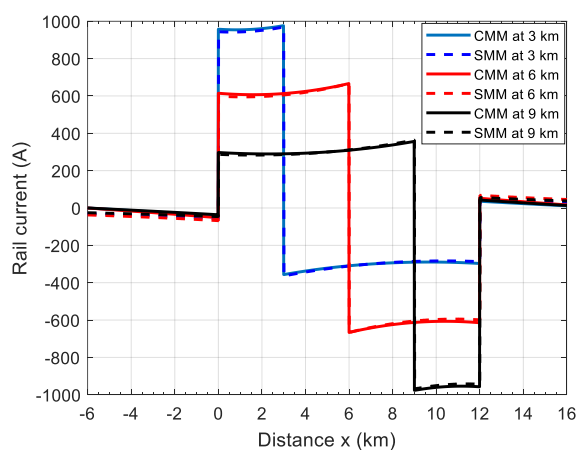
จากผลการจำลองจะพบว่ากราฟของกระแสไฟฟ้าและศักย์ไฟฟ้าที่รางมีแนวโน้มเดียวกันทั้งสองวิธีโดยมีค่าความคลาดเคลื่อนของศักย์ไฟฟ้าที่รางเป็น 17.05%, 8.94% และ 17.05% เมื่อรถไฟอยู่ที่ตำแหน่ง 3, 6 และ 9 km ตามลำดับ ดังแสดงในตารางที่ 1 ดังนั้นแบบจำลองทั้งสองที่ได้นำเสนอนั้นจะมีปริมาณความคลาดเคลื่อนของศักย์ไฟฟ้าที่รางแตกต่างกันเนื่องจากการกำหนดขอบเขตด้านข้างของแบบจำลองทั้งสองซึ่งเป็นปัจจัยหลักสำคัญและเป็นข้อที่ควรระมัดระวังในการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์อย่างง่าย



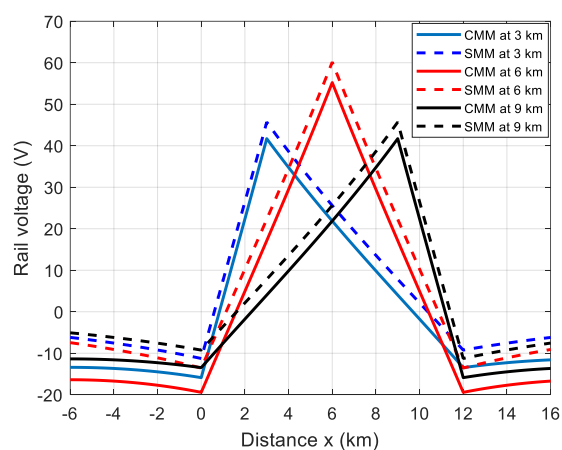
รูปที่ 5 กระแสไฟฟ้าที่ราง



รูปที่ 6 ศักย์ไฟฟ้าที่ราง



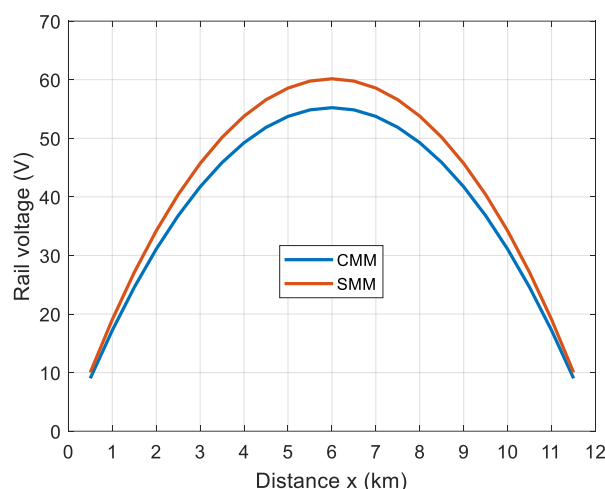
รูปที่ 7 กระแสไฟฟ้าที่รางของระบบจ่ายไฟ 3,000 V



รูปที่ 8 ศักย์ไฟฟ้าที่รางของระบบจ่ายไฟ 3,000 V

5.2 การคำนวณศักย์ไฟฟ้าสูงสุด

การจำลองในหัวข้อนี้จะทำการจำลองผลการเคลื่อนที่ของรถไฟโดยที่โหลดคงที่ของทั้งสองแบบจำลองโดยใช้พารามิเตอร์ของระบบจ่ายไฟ 3,000 V เพื่อพิจารณาค่าศักย์ไฟฟ้าสูงสุดที่รางดังแสดงในรูปที่ 9



รูปที่ 9 ศักย์ไฟฟ้าสูงสุดที่ราง

จากรูปที่ 9 จะพบว่าศักย์ไฟฟ้าที่รางสูงสุดจะเกิดที่กึ่งกลางของระยะทางระหว่างสถานีไฟฟ้าขับเคลื่อนทั้งสอง (ที่ 6 km) ดังนั้นสามารถคำนวณศักย์ไฟฟ้าสูงสุดที่รางและแรงดันไฟฟ้าที่สถานีไฟฟ้าขับเคลื่อนโดยการเปรียบเทียบกันระหว่าง การประมาณ ศักย์ไฟฟ้าที่รางตามมาตรฐาน EN 50 122-2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบพื้นฐาน (CMM) แบบจำลองทางคณิตศาสตร์อย่างง่าย (SMM) และสมการคำนวณอย่างง่าย (SCE) สามารถแสดงได้ดังตารางที่ 1 สำหรับระบบจ่ายไฟ 3,000 V

ตารางที่ 1 ศักย์ไฟฟ้าสูงสุดที่รางและแรงดันไฟฟ้าที่สถานีไฟฟ้าขับเคลื่อนสำหรับระบบจ่ายไฟ 3,000 V

แรงดันไฟฟ้า	มาตรฐาน EN 50122-2	แบบจำลองทางคณิตศาสตร์		
		CMM	SMM	SCE
U_{RE} (V)	60.1584	41.7088	60.1584	60.1584
U_S (V)	-	15.8785	13.5714	13.5714
% U_{RE}		30.67 %	0 %	0 %

หมายเหตุ: ตามมาตรฐาน EN 50122-2 ไม่มีสมการคำนวณแรงดันไฟฟ้าที่สถานี

จากตารางที่ 1 ได้แสดงผลการคำนวณศักย์ไฟฟ้าสูงสุดที่รางและแรงดันไฟฟ้าที่สถานีไฟฟ้าขับเคลื่อนของระบบระบบจ่ายไฟ 3,000 V พบว่าการประมาณศักย์ไฟฟ้าที่รางตามมาตรฐาน EN 50 122-2 ภาคผนวก C มีค่าเท่ากับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อย่างง่าย และสมการคำนวณอย่างง่าย เมื่อเปรียบเทียบกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบพื้นฐานพบว่ามีค่าความคลาดเคลื่อน 30.67% สำหรับระบบระบบจ่ายไฟ 3,000 และในมาตรฐาน EN 50 122-2 ไม่มีสมการคำนวณแรงดันไฟฟ้าที่สถานีไฟฟ้าขับเคลื่อนดังนั้นจึงไม่สามารถคำนวณหาความคลาดเคลื่อนได้ นอกจากนี้จะเห็นได้ว่าการคำนวณศักย์ไฟฟ้าสูงสุดที่รางระบบจ่ายไฟ 3,000 V มีความคลาดเคลื่อนที่ไม่เท่ากันเนื่องมาจากระยะห่างของสถานีไฟฟ้าขับเคลื่อน

ถึงแม้ว่าการสมการการประมาณศักย์ไฟฟ้าที่ร่างตามมาตรฐาน EN 50122-2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์อย่างง่ายและสมการการคำนวณอย่างง่ายจะมีค่าความคลาดเคลื่อนสูงเมื่อเทียบกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบพื้นฐานแต่ก็ยังสามารถนำไปใช้ได้สำหรับการประเมินกระแสรั่วไหลเนื่องจากวิธีการดังกล่าวยังมีค่าศักย์ไฟฟ้าที่ร่างสูงกว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบพื้นฐานซึ่งถือว่าเป็นแบบจำลองที่เป็นไปตามข้อกำหนดมากที่สุด นอกจากนี้การประเมินกระแสรั่วไหลพบว่าค่าศักย์ไฟฟ้าที่ร่างทุกวิธีการคำนวณมีค่าไม่เกิน 120 V ตามมาตรฐาน EN 50122-1 ที่ได้กำหนดไว้และยังสามารถระบุได้ว่าพารามิเตอร์ของระบบรถไฟไฟฟ้าที่ได้กำหนดไว้ผ่านมาตรฐานการประเมินกระแสรั่วไหลเบื้องต้น ดังนั้นเพื่อช่วยในการวิเคราะห์และประเมินกระแสรั่วไหลในรถไฟฟ้ายกแรงโดยตรงโดยการประมาณศักย์ไฟฟ้าที่ร่างและแรงดันไฟฟ้าที่สถานีไฟฟ้าได้จากสมการที่ (49) และ (50) ตามลำดับ และสำคัญควรระมัดระวังในการใช้สมการคำนวณอย่างง่ายนี้โดยสามารถดูรายละเอียดตามมาตรฐาน EN 50122-2

6. สรุป

การวิเคราะห์และประเมินกระแสรั่วไหลในรถไฟฟ้ายกแรงโดยตรงโดยการพิจารณาศักย์ไฟฟ้าสูงสุดที่ร่างในบทความนี้ได้นำเสนอ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบพื้นฐาน (CMM) และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อย่างง่าย (SMM) พบว่าทั้งสองแบบจำลองที่นำเสนอมีความแตกต่างกันเนื่องจากแบบจำลอง CMM ได้กำหนดขอบเขตด้านข้างที่จำกัดแต่แบบจำลองทาง SMM มีขอบเขตด้านข้างที่เป็นอนันต์ ดังนั้นเมื่อระยะด้านข้างของแบบจำลองดั้งเดิมมีระยะด้านข้างที่มากขึ้นจะทำให้กระแสและศักย์ไฟฟ้าที่ร่างมีค่าเท่ากัน

นอกจากนี้ยังได้แสดงสมการการคำนวณอย่างง่าย (SCE) สำหรับการประมาณศักย์ไฟฟ้าสูงสุดที่ร่างและแรงดันไฟฟ้าที่สถานีไฟฟ้าถึงแม้ว่าจะเกิดความคลาดเคลื่อนสูงแต่ก็ยังสามารถนำไปใช้ได้สำหรับการประเมินกระแสรั่วไหลเนื่องจากวิธีการดังกล่าวยังมีค่าศักย์ไฟฟ้าที่ร่างสูงกว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบพื้นฐานและควรระมัดระวังในการใช้สมการคำนวณอย่างง่ายนี้โดยสามารถดูรายละเอียดตามมาตรฐาน EN 50122-2 ดังนั้นสมการการคำนวณอย่างง่ายสามารถนำไปใช้ในการวิเคราะห์และประเมินกระแสรั่วไหลได้และยังได้ตรวจสอบความถูกต้องว่าสมการเป็นไปตามมาตรฐาน EN 50122-2

กิตติกรรมประกาศเอกสารอ้างอิง

งานวิจัยนี้ได้ทุนสนับสนุนเป็นผู้รับทุนผู้ช่วยวิจัยระดับปริญญาเอกจากโครงการพัฒนานักวิจัยและงานวิจัยเพื่ออุตสาหกรรม (พวอ.) รอบ 1/2557 ประจำปีงบประมาณ 2557

เอกสารอ้างอิง

- [1] Friedrich, K. Rainer, P. Axel, S. and Egid, S. *Contact Lines for Electric Railways: Planning, Design, Implementation, Maintenance*, 2nd ed. Germany: Publicis Publishing, 2009.
- [2] Tawat Chuchit and Thanatchai Kulworawanichpong. Analysis of the track-to-earth resistances of DC rail transit systems viaduct for the assessment of stray current interference, In: *The 3rd Thailand Rail Academic Symposium (TRAS2016)*, Thailand, 1-2 September 2016.
- [3] Valero, R. J. Sanz, F. J. Calculation of remote effects of stray currents on rail voltages in dc railways systems, *IET Electrical Systems in Transportation*, 2013, 3(2), pp. 31-40.
- [4] Yu-qiao, W. Wei, L. Xue-feng, Y. Guo, Y. Qi-gao, F. and Li-ping, Z. Modeling and simulation the distribution of metro stray current, In: *2010 International Conference on Computer Application and System Modeling (ICCASM 2010)*, China, 22-24 October 2010, pp. 704-707.

-
- [5] Fichera, F. Mariscotti, A. Ogunsola, A. Sandrolini, L. Comparison of distributed and lumped parameters stray current models, In: *IEEE African Conference (AFRICON 2013)*, Mauritius, 9-12 September 2013, pp. 1-5.
 - [6] Fichera, F. Mariscotti, A. Ogunsola, A. Evaluating stray current from DC electrified transit systems with lumped parameter and multi-layer soil models, In: *International Conference on Computer as a Tool (EUROCON 2013)*, Croatia, 1-4 July 2013, pp. 1187-1192.
 - [7] Charalambous, C. A. Cotton, I. Aylott, P. A Simulation Tool to Predict the Impact of Soil Topologies on Coupling Between a Light Rail System and Buried Third-Party Infrastructure, *Vehicular Technology, IEEE Transactions*, 2008, 57(3), pp. 1404-1416.
 - [8] Jorge, V. R. and Javier, S. F. Calculation of remote effects of stray currents on rail voltages in dc railways systems, *IET Electrical Systems in Transportation* 2013, 3(2), pp. 31-40.
 - [9] R. J. Hill. Electric railway traction. VII. Electromagnetic interference in traction systems, *Power Engineering Journal*, 1997, 11(6), pp. 259-266.
 - [10] Thanatchai Kulworawanichpong. *Railway Electrification*, SUT 1st ed. Thailand: Charannitwong printing co.ltd, 2017.
 - [11] Hadi Saadat. *Power Systems Analysis*, 2nd ed. USA: Published by McGraw-Hill, 2002.
 - [12] Charles, k. A. Matthew, N. O. S. *Fundamentals of Electric Circuits*, 4th ed. Germany: Published by McGraw-Hill, 2009.
 - [13] British Standards Institution. BS EN 50122-2: 2010. *Railway applications - Fixed installations - Electrical safety, earthing and the return circuit - Part 2: Provisions against the effects of stray currents caused by d.c. traction systems*, London: BSI, 2010.
 - [14] British Standards Institution. BS EN 50122-1: 2011. *Railway applications - Fixed installations - Electrical safety, earthing and the return circuit - Part 1: Protective provisions against electric shock*, London: BSI, 2011.