

แบบจำลองและการจำลองผลมอเตอร์เหนี่ยวนำเฟสเดียว ที่เชื่อมต่อหลายตัวแบบขนาน

ศักดิ์ระวี ระวีกุล¹ ธนัชชัย กุลวรวานิชพงษ์² และ สรวุฒิ สุจิตจร³

Abstract

Raweekul, S., Kulworawanichpong, T., and Sujitjorn, S.
**Modelling and simulation of multiple single - phase induction motor
in parallel connection**
Songklanakarin J. Sci. Technol., 2006, 28(6) : 1335-1350

A mathematical model for parallel connected n-multiple single-phase induction motors in generalized state-space form is proposed in this paper. The motor group draws electric power from one inverter. The model is developed by the dq-frame theory and was tested against four loading scenarios in which satisfactory results were obtained.

Key words : single-phase induction motor, multiple, parallel connection, modelling

School of Electrical Engineering, Institute of Engineering, Suranaree University of Technology, Muang, Nakhon Ratchasima, 30000 Thailand.

¹นักศึกษาระดับปริญญาเอก สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า, ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ²Ph.D.(Electrical Engineering), ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ³Ph.D.(Electrical Engineering), ศาสตราจารย์ สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี อำเภอเมือง จังหวัดนครราชสีมา 30000

Corresponding e-mail: mr_sakrawee@yahoo.com

รับต้นฉบับ 5 มกราคม 2549 รับลงพิมพ์ 8 พฤษภาคม 2549

บทคัดย่อ

ศักดิ์ระวี ระวีกุล ธนัตชัย กุศลรวานิชพงษ์ และ สรวุฒิ สุจิตจร
 แบบจำลองและการจำลองมอเตอร์เหนี่ยวนำเฟสเดียวที่เชื่อมต่อหลายตัวแบบขนาน
 ว. สงขลานครินทร์ วทท. 2549 28(6) : 1335-1350

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับกลุ่มของมอเตอร์เหนี่ยวนำหนึ่งเฟสซึ่งต่อขนานกัน n ตัว ในรูปของสมการปริภูมิสถานะที่นำเสนอในบทความนี้ได้พัฒนาให้อยู่ในรูปแบบที่เป็นลักษณะทั่วไปเพื่อให้ง่ายในการนำมาใช้ประโยชน์ในงานที่มีมอเตอร์หลายตัวต่อขนาน รับกำลังไฟฟ้าจากแหล่งจ่ายผ่านอินเวอร์เตอร์ชุดเดียว แบบจำลองที่พัฒนาขึ้นอาศัยหลักการ dq-frame พร้อมกันนี้ได้ทำการทดสอบแบบจำลองการขนานมอเตอร์ n ตัวที่ได้พัฒนาขึ้น โดยจำลองการขับโหลดในสภาวะต่าง ๆ 4 สภาวะ ซึ่งผลที่ได้มีความสอดคล้องกัน

ในโรงงานอุตสาหกรรมหลายประเภท เช่น อุตสาหกรรมแป้งมันสำปะหลัง อุตสาหกรรมเส้นใยและถักทอ และอุตสาหกรรมแปรรูปอาหาร มีการใช้เครื่องจักรกลที่ประกอบด้วย มอเตอร์เหนี่ยวนำ ทำหน้าที่ขับเคลื่อนกระบวนการต่างๆ เนื่องจากมอเตอร์เหนี่ยวนำมีโครงสร้างแข็งแรงและใช้งานง่าย การควบคุมมอเตอร์ให้ทำงานต้องคำนึงถึงประสิทธิภาพ ความคุ้มค่าทางด้านพลังงานและการลงทุน ในบางกิจกรรมของโรงงานอุตสาหกรรมจะต้องใช้มอเตอร์ที่มีพิกัดเท่ากัน ทำงานขับโหลดที่มีสมบัติคล้ายกันหลายๆ ตัว สิ่งที่ต้องการตามมาคืออุปกรณ์ควบคุมที่ต้องใช้ควบคุมการขับเคลื่อนมอเตอร์แต่ละตัว อุปกรณ์ดังกล่าวมักจะมีราคาแพง หากสามารถใช้อุปกรณ์ขับเคลื่อนเพียงชุดเดียวกับมอเตอร์หลายตัวที่ต่อขนานกันก็จะเป็นการช่วยลดต้นทุนการผลิตได้ระดับหนึ่ง ดังเช่น ที่มีการใช้ในระบบลากจูงรถไฟ (Matsuse et al., 2001) การใช้เทคโนโลยีในแนวนอนนี้มีประโยชน์ต่ออุตสาหกรรมหลายประเภทที่มีอัตราพิกัดและธรรมชาติของโหลดแตกต่างกัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งการนำเทคโนโลยีดังกล่าวมาพัฒนาระบบอุตสาหกรรมที่มีขนาดเล็ก กำลังการผลิตต่ำ และต้องการระบบที่มีขนาดไม่ใหญ่มากนัก เช่น อุตสาหกรรมขนาดย่อม ในการพัฒนาเทคโนโลยีการขับมอเตอร์ต่อขนานกันหลายตัวนั้น จะต้องอาศัยองค์ความรู้เกี่ยวกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ การวิเคราะห์แบบจำลองในบทความนี้จักได้มุ่งเน้นพัฒนาแบบจำลองของมอเตอร์เหนี่ยวนำชนิดหนึ่งเฟสที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายในภาคอุตสาหกรรมขนาดย่อม เพื่อให้เกิดความเหมาะสมในระบบ

การผลิตที่ใช้มอเตอร์เหนี่ยวนำหนึ่งเฟสต่อขนานกันหลายตัว ขับเคลื่อนด้วยอินเวอร์เตอร์เพียงตัวเดียว ซึ่งในการวิเคราะห์หาแบบจำลองนี้ จะพิจารณาแหล่งจ่ายออกเป็นสองเฟส (Jang et al., 1994) แหล่งจ่ายสองเฟสนี้ได้มาจากอินเวอร์เตอร์แบบหนึ่งเฟสตามธรรมดาที่มีใช้กันโดยทั่วไป ระบบขับเคลื่อนสำหรับมอเตอร์เหนี่ยวนำหนึ่งเฟสลักษณะเช่นนี้ มีประโยชน์มากต่ออุตสาหกรรมขนาดเล็กและกลาง การพัฒนาแบบจำลองนั้นพิจารณามอเตอร์ตามแบบแกน d-q ซึ่งทั้งสองแกนจะตั้งฉากกันตามลักษณะการวางตัวของชุดขดลวดโรเตอร์และชุดขดลวดสเตเตอร์ ทำให้สนามแม่เหล็กของชุดขดลวดทั้งสองตั้งฉากกัน ดังนั้นหลักการ dq-frame (Mutsuse et al., 2004), (Krishnan, 2001) จึงเป็นพื้นฐานของการพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่นำเสนอนี้

ในการวิเคราะห์หาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้แบ่งออกเป็น 4 ส่วนคือ 1. ส่วนของการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของมอเตอร์เหนี่ยวนำหนึ่งเฟสโดยใช้ทฤษฎีกรอบอ้างอิง 2. การวิเคราะห์หาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการขนานมอเตอร์ n ตัวในรูปของสมการปริภูมิสถานะ 3. การจำลองผลโดยทดสอบแบบจำลองในสภาวะต่างๆ 4 สภาวะ และในส่วนสุดท้ายเป็นการสรุป

1. แบบจำลองมอเตอร์เหนี่ยวนำหนึ่งเฟส

ในการวิเคราะห์หาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของมอเตอร์เหนี่ยวนำเฟสเดียว จะพิจารณาจากโครงสร้างของมอเตอร์ (Krishnan, 2001) ซึ่งประกอบด้วย ขดลวด 2 ชุด

คือชุดที่อยู่บนสเตเตอร์ ประกอบด้วย ขดลวดหลัก (main winding) และขดลวดช่วย (auxiliary winding) ส่วนชุดที่สองนั้นอยู่ที่โรเตอร์ดังแสดงใน Figure 1 ในการพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะใช้แบบสองเฟส หรืออาจเรียกว่าสองแกน ซึ่งประกอบด้วย แกน d และแกน q ตั้งฉากกัน วิเคราะห์หาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ อาศัยหลักการ dq-frame การพัฒนาแบบจำลองมีการย้ายตัวแปรบนโรเตอร์ไปอยู่บนสเตเตอร์ตามทฤษฎีกรอบอ้างอิง (reference frame theory) (Krause *et al.*, 1995) Figure 2 แสดงการวางตัวของขดลวดขดลวดที่อยู่บนสเตเตอร์ โดยแกน q คือแกนของขดลวดหลักที่มีค่าแรงดันเป็น V_{qs} มีกระแสไหลในขดลวดเป็น i_{qs} และมีจำนวนรอบขดลวดเป็น N_{qs} แกน d คือแกนของขดลวดช่วยที่มีค่าแรงดันเป็น V_{ds} มีกระแสไหลในขดลวดเป็น i_{ds} และมีจำนวนรอบขดลวดเป็น N_{ds} ในส่วนของโรเตอร์จะประกอบด้วยแกน q มีค่าแรงดันเป็น V_{qr} มีกระแสไหลในขดลวดเป็น i_{qr} และมีจำนวนรอบขดลวดเป็น N_{qr} แกน d มีค่าแรงดันเป็น V_{dr} มีกระแสไหลในขดลวดเป็น i_{dr} และมีจำนวนรอบขดลวด

เป็น N_{dr} เมื่อแกน q_r ทำมุมกับแกน q_s อยู่ θ_r สามารถแยกเวกเตอร์เข้าสู่แกนหลักของขดลวดสเตเตอร์โดยใช้ทฤษฎีกรอบอ้างอิง จากแผนภาพขดลวดสเตเตอร์และโรเตอร์ของมอเตอร์เหนี่ยวนำพิจารณาในแบบสองแกนดังที่แสดงใน Figure 2 สามารถเขียนสมการความสัมพันธ์ของแรงดันในรูปเมตริกซ์ โดยกำหนดให้ค่าที่มีตัวยก s แสดงถึงค่าที่อยู่บนสเตเตอร์ ในทำนองเดียวกันค่าที่มีตัวยก r แสดงถึงค่าที่อยู่บนโรเตอร์

$$\begin{bmatrix} V_{qr}^s \\ V_{dr}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_r & \cos(90-\theta_r) \\ \cos(90+\theta_r) & \cos\theta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{qr}^r \\ V_{dr}^r \end{bmatrix} \quad (1)$$

หรือ

$$\begin{bmatrix} V_{qr}^r \\ V_{dr}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_r & \sin\theta_r \\ -\sin\theta_r & \cos\theta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{qr}^s \\ V_{dr}^s \end{bmatrix} \quad (2)$$

สมการที่ 2 สามารถเขียนให้กระชับได้ว่า

$$[S_{sr}^s] = [k][S_{sr}^r] \quad (3)$$

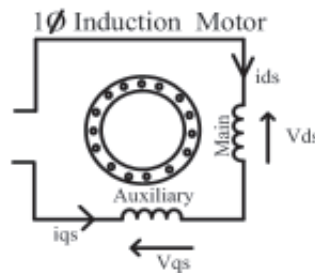


Figure 1. Winding composition

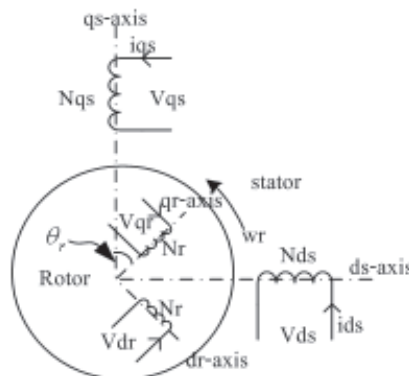


Figure 2. Orientation of the stator and the rotor windings.

เมื่อ V_{sr}^s คือ ค่าใดๆ ที่แปลงแกนจากโรเตอร์มายังสเตเตอร์
 V_{sr}^r คือ ค่าใดๆ ที่อยู่บนโรเตอร์
 k คือ เมตริกซ์การแปลงระหว่างสเตเตอร์กับโรเตอร์

$$[k] = \begin{bmatrix} \cos\theta_r & \sin\theta_r \\ -\sin\theta_r & \cos\theta_r \end{bmatrix}$$

ในการวิเคราะห์หาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของมอเตอร์เหนี่ยวนำหนึ่งเฟสนี้ จะแยกพิจารณาออกเป็นสองส่วน คือ พิจารณาส่วนของสเตเตอร์ และส่วนของโรเตอร์ ดังนี้

1) พิจารณาส่วนของสเตเตอร์

จากสมการแรงดันที่เกิดขึ้นบนสเตเตอร์ จะได้ความสัมพันธ์ของแรงดัน กระแส ความต้านทาน และความเหนี่ยวนำ ดังนี้

$$V_{qs} = r_{qs} i_{qs} + L_{qsqs} p i_{qs} + L_{qsds} p i_{ds} + L_{qsqr} p i_{qr} + L_{qsdr} p i_{dr}$$

$$V_{ds} = r_{ds} i_{ds} + L_{dsqs} p i_{qs} + L_{dsds} p i_{ds} + L_{dsqr} p i_{qr} + L_{dsdr} p i_{dr}$$

เมื่อ p คือ อนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับเวลา และสามารถจัดให้อยู่ในรูปสมการเมตริกซ์ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} V_{qs}^s \\ V_{ds}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{qs} + pL_{qsqs} & pL_{qsds} \\ pL_{dsqs} & r_{ds} + pL_{dsds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qs}^s \\ i_{ds}^s \end{bmatrix} + p \left\{ \begin{bmatrix} L_{qsqr} & L_{qsdr} \\ L_{dsqr} & L_{dsdr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qr}^r \\ i_{dr}^r \end{bmatrix} \right\} \quad (4)$$

ในสมการที่ 4 จะเห็นว่ามีส่วนของกระแสโรเตอร์อยู่ทางขวามือสุดของสมการ ทำการย้ายกระแสโรเตอร์ไปยังสเตเตอร์ ด้วยเมตริกซ์การแปลงแกนดังต่อไปนี้

$$[i_x^s] = [k] [i_x^r] \text{ หรือ } [i_x^r] = [k]^{-1} [i_x^s]$$

จึงสามารถเขียนแสดงสมการ (4) ได้ในรูป

$$\begin{bmatrix} V_{qs}^s \\ V_{ds}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{qs} + pL_{qsqs} & pL_{qsds} \\ pL_{dsqs} & r_{ds} + pL_{dsds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qs}^s \\ i_{ds}^s \end{bmatrix} + p \left\{ \begin{bmatrix} L_{qsqr} & L_{qsdr} \\ L_{dsqr} & L_{dsdr} \end{bmatrix} [k]^{-1} \begin{bmatrix} i_{qr}^s \\ i_{dr}^s \end{bmatrix} \right\}$$

นั่นก็คือ

$$\begin{bmatrix} V_{qs}^s \\ V_{ds}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{qs} + pL_{qsqs} & pL_{qsds} \\ pL_{dsqs} & r_{ds} + pL_{dsds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qs}^s \\ i_{ds}^s \end{bmatrix} + p \left\{ \begin{bmatrix} L_{qsqr} & L_{qsdr} \\ L_{dsqr} & L_{dsdr} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ \sin\theta_r & \cos\theta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qr}^s \\ i_{dr}^s \end{bmatrix} \right\} \quad (5)$$

เมื่อค่าเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กระหว่างแกน d-q ในฝั่งขวาของสมการ (5) ตั้งฉากกันทำให้มีค่าความเหนี่ยวนำเป็นศูนย์ จัดรูปสมการ (5) ใหม่จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} V_{qs}^s \\ V_{ds}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{qs} & 0 \\ 0 & r_{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qs}^s \\ i_{ds}^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{qsqr} & 0 \\ 0 & L_{dsqr} \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} i_{qs}^s \\ i_{ds}^s \end{bmatrix} + p \left\{ \begin{bmatrix} L_{qsqr} \cos\theta_r & -L_{qsqr} \sin\theta_r \\ L_{dsqr} \sin\theta_r & L_{dsqr} \cos\theta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qr}^s \\ i_{dr}^s \end{bmatrix} \right\} \quad (6)$$

นั่นก็คือ

$$\begin{bmatrix} V_{qs}^s \\ V_{ds}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{qs} & 0 \\ 0 & r_{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qs}^s \\ i_{ds}^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{qsqr} & 0 \\ 0 & L_{qsdr} \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} i_{qs}^s \\ i_{ds}^s \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} -\omega_r L_{qsqr} \sin \theta_r & -\omega_r L_{qsqr} \cos \theta_r \\ \omega_r L_{dsdr} \cos \theta_r & -\omega_r L_{dsdr} \sin \theta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qr}^s \\ i_{dr}^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{qsqr} \cos \theta_r & -L_{qsqr} \sin \theta_r \\ L_{dsdr} \sin \theta_r & L_{dsdr} \cos \theta_r \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} i_{qr}^s \\ i_{dr}^s \end{bmatrix} \right\} \quad (7)$$

2) พิจารณาที่โรเตอร์

พิจารณาในกรณีที่โรเตอร์สมมาตร กล่าวคือ จำนวนรอบของขดลวดในแนวแกน d และ q มีค่าเท่ากันและความต้านทานของขดลวดที่โรเตอร์ในแนวแกน d และ q จะมีค่าเท่ากัน ($r_{qr} = r_{dr} = r_r$) และสมการแรงดันที่โรเตอร์เป็นดังนี้

$$V_{qr}^r = r_{qr} i_{qr}^r + L_{qrqr} p i_{qr}^r + L_{qsds} p i_{dr}^r + L_{qrqs} p i_{qs}^r + L_{qdrds} p i_{ds}^r$$

$$V_{dr}^r = r_{dr} i_{dr}^r + L_{drqr} p i_{qr}^r + L_{dsds} p i_{dr}^r + L_{drqs} p i_{qs}^r + L_{drds} p i_{ds}^r$$

และอาจจัดให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} V_{qr}^r \\ V_{dr}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{qr} + pL_{qrqr} & pL_{qrdr} \\ pL_{drqr} & r_{dr} + pL_{drdr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qr}^r \\ i_{dr}^r \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} L_{qrqs} & L_{qdrds} \\ L_{drqr} & L_{drds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qs}^s \\ i_{ds}^s \end{bmatrix} \quad (8)$$

ทำการย้ายตัวแปรแรงดันและกระแสที่อยู่บนโรเตอร์ไปยังสเตเตอร์ ด้วยหลักการแปลงแกนดังที่แปลงกระแส

$$[i_r^r] = [k]^{-1} [i_r^s] \quad (9)$$

แปลงแรงดัน

$$[V_r^r] = [k]^{-1} [V_r^s] \quad (10)$$

สมการ (8) จึงอาจเขียนแสดงได้ดังรูปสมการ (11) และ (12) ตามลำดับ

$$[k]^{-1} \begin{bmatrix} V_{qr}^s \\ V_{dr}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{qr} + pL_{qrqr} & pL_{qrdr} \\ pL_{drqr} & r_{dr} + pL_{drdr} \end{bmatrix} \bullet [k]^{-1} \begin{bmatrix} i_{qr}^s \\ i_{dr}^s \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} L_{qrqs} & L_{qdrds} \\ L_{drqr} & L_{drds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qs}^s \\ i_{ds}^s \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} V_{qr}^s \\ V_{dr}^s \end{bmatrix} = [k] \begin{bmatrix} r_{qr} & 0 \\ 0 & r_{dr} \end{bmatrix} [k]^{-1} \begin{bmatrix} i_{qr}^s \\ i_{dr}^s \end{bmatrix} + [k] \begin{bmatrix} L_{qrqr} & L_{qrdr} \\ L_{drqr} & L_{dsdr} \end{bmatrix} [k]^{-1} p \begin{bmatrix} i_{qr}^s \\ i_{dr}^s \end{bmatrix} + p \left\{ [k] \begin{bmatrix} L_{qrqs} & L_{qdrds} \\ L_{drqr} & L_{drds} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} i_{qs}^s \\ i_{ds}^s \end{bmatrix} \quad (12)$$

พิจารณาฝั่งขวาของสมการ (12) จะเห็นว่ามีส่วนพจน์รวมกันทางพีชคณิต เมื่อพิจารณาพจน์ที่ 1 คือพจน์ที่อยู่ชุดแรกทางฝั่งขวาของสมการ นั่นคือ

$$[k] \begin{bmatrix} r_{qr} & 0 \\ 0 & r_{dr} \end{bmatrix} [k]^{-1} \begin{bmatrix} i_{qr}^s \\ i_{dr}^s \end{bmatrix}$$

ทำการแทนค่าเมทริกซ์ $[k]$ และเมทริกซ์ $[k]^{-1}$ จะได้

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_r & \sin\theta_r \\ -\sin\theta_r & \cos\theta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{qr} & 0 \\ 0 & r_{dr} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ \sin\theta_r & \cos\theta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qr}^s \\ i_{dr}^s \end{bmatrix}$$

จัดรูปให้ง่ายขึ้นจะได้

$$\begin{bmatrix} r_{qr} \cos^2\theta_r + r_{dr} \sin^2\theta_r & -r_{qr} \cos\theta_r \sin\theta_r + r_{dr} \sin\theta_r \cos\theta_r \\ -r_{qr} \cos\theta_r \sin\theta_r + r_{dr} \sin\theta_r \cos\theta_r & r_{dr} \cos^2\theta_r + r_{qr} \sin^2\theta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qr}^s \\ i_{dr}^s \end{bmatrix}$$

ในกรณีที่ $r_{qr} = r_{dr} = r_r$ ตลอดจน $\cos^2\theta_r + \sin^2\theta_r = 1$

พจน์ดังกล่าวจึงลดรูปเป็น

$$\begin{bmatrix} r_r & 0 \\ 0 & r_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qr}^s \\ i_{dr}^s \end{bmatrix} \tag{13}$$

พิจารณาส่วนที่ 2 ที่อยู่ทางฝั่งขวาของสมการ (12) ในกรณีที่ค่าความเหนี่ยวนำร่วมระหว่างแกน d-q ของโรเตอร์มีค่าเท่ากับศูนย์เนื่องจากแกนทั้งสองอยู่ในตำแหน่งทำมุมตั้งฉากซึ่งกันและกัน พร้อมทั้งแทนค่าเมตริกซ์ $[k]$ และ $[k]^{-1}$ พจน์ที่ได้เป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_r & \sin\theta_r \\ -\sin\theta_r & \cos\theta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{qrqr} & 0 \\ 0 & L_{drdr} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ \sin\theta_r & \cos\theta_r \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} i_{qr}^s \\ i_{dr}^s \end{bmatrix} \tag{14}$$

จัดรูปให้ง่ายขึ้นจะได้

$$\begin{bmatrix} L_{qrqr} \cos^2\theta_r + L_{drdr} \sin^2\theta_r & -L_{qrqr} \sin\theta_r \cos\theta_r + L_{drdr} \sin\theta_r \cos\theta_r \\ -L_{qrqr} \sin\theta_r \cos\theta_r + L_{drdr} \sin\theta_r \cos\theta_r & L_{qrqr} \cos^2\theta_r + L_{drdr} \sin^2\theta_r \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} i_{qr}^s \\ i_{dr}^s \end{bmatrix} \tag{15}$$

เมื่อความเหนี่ยวนำตัวเอง (self inductance) ของโรเตอร์บริเวณแกน q และ d มีค่าเท่ากัน $L_{qrqr} = L_{drdr}$ เนื่องจากมีจำนวนรอบของขดลวดเท่ากัน พจน์ (15) สามารถลดรูปได้เป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix} L_{qrqr} & 0 \\ 0 & L_{qrqr} \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} i_{qr}^s \\ i_{dr}^s \end{bmatrix} \tag{16}$$

เมื่อพิจารณาพจน์ที่ 3 คือพจน์ที่อยู่ชุดสุดท้ายทางฝั่งขวาของสมการ (12) ซึ่งก็คือ

$$P \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta_r & \sin\theta_r \\ -\sin\theta_r & \cos\theta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{qrqs} & L_{qrds} \\ L_{drqs} & L_{drds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qs}^s \\ i_{ds}^s \end{bmatrix} \right\} \tag{17}$$

เมื่อคืออนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับเวลาเราสามารถจัดรูปพจน์ (17) ได้ใหม่ดังนี้

$$\begin{bmatrix} -\omega_r L_{qrqs} \sin\theta_r + \omega_r L_{drqs} \cos\theta_r & -\omega_r L_{qrds} \sin\theta_r + \omega_r L_{drds} \cos\theta_r \\ -\omega_r L_{qrqs} \cos\theta_r - \omega_r L_{drqs} \sin\theta_r & -\omega_r L_{qrds} \cos\theta_r - \omega_r L_{drds} \sin\theta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qr}^s \\ i_{dr}^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{qrqs} \sin\theta_r + L_{drqs} \sin\theta_r & L_{qrds} \cos\theta_r + L_{drds} \sin\theta_r \\ -L_{qrqs} \sin\theta_r + L_{drqs} \cos\theta_r & -L_{qrds} \sin\theta_r + L_{drds} \cos\theta_r \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} i_{qr}^s \\ i_{dr}^s \end{bmatrix} \tag{18}$$

เมื่อนำพจน์ (13), (16) และ (17) แทนกลับลงไปนสมการ (12) จะได้สมการ (19) จากการที่ย้ายค่ากระแสมาอยู่บนแกน dq ของสเตเตอร์จะทำให้ค่าความเหนี่ยวนำระหว่างแกน d และแกน q หายไป เนื่องจากขดลวดทั้งสองทำมุมกัน 90 องศา

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} V_{qr}^s \\ V_{dr}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_r & 0 \\ 0 & r_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qr}^s \\ i_{dr}^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{qrqr} & 0 \\ 0 & L_{qrqr} \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} i_{qr}^s \\ i_{dr}^s \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} -\omega_r L_{qrqs} \sin\theta_r + \omega_r L_{drqs} \cos\theta_r & -\omega_r L_{qrds} \sin\theta_r + \omega_r L_{drds} \cos\theta_r \\ -\omega_r L_{qrqs} \cos\theta_r - \omega_r L_{drqs} \sin\theta_r & -\omega_r L_{qrds} \cos\theta_r - \omega_r L_{drds} \sin\theta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qr}^s \\ i_{dr}^s \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} L_{qrqs} \cos\theta_r + L_{drqs} \sin\theta_r & L_{qrds} \cos\theta_r + L_{drds} \sin\theta_r \\ -L_{qrqs} \sin\theta_r + L_{drqs} \cos\theta_r & -L_{qrds} \sin\theta_r + L_{drds} \cos\theta_r \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} i_{qr}^s \\ i_{dr}^s \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

กระแสจากโรเตอร์ที่ย้ายมาอยู่บนแกน q ของสเตเตอร์ไม่สามารถสร้างความเหนี่ยวนำไปยังแกน d ของสเตเตอร์ได้ ค่าความเหนี่ยวนำของแกน dq ในสมการ (19) จึงมีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} V_{qr}^s \\ V_{dr}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_r & 0 \\ 0 & r_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qr}^s \\ i_{dr}^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{qrqr} & 0 \\ 0 & L_{qrqr} \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} i_{qr}^s \\ i_{dr}^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega_r L_{qrqs} \sin\theta_r & \omega_r L_{drds} \cos\theta_r \\ -\omega_r L_{qrqs} \cos\theta_r & \omega_r L_{drds} \sin\theta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qr}^s \\ i_{dr}^s \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} L_{qrqs} \cos\theta_r & L_{drds} \sin\theta_r \\ -L_{qrqs} \sin\theta_r & L_{drds} \cos\theta_r \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} i_{qr}^s \\ i_{dr}^s \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

เมื่อทำการแปลงแกนตามหลักการกรอบอ้างอิงอยู่กับที่ ดังที่ได้แสดงมาแล้วข้างต้น สามารถนำส่วนที่เป็นสมการแรงดันของสเตเตอร์และโรเตอร์มาเขียนให้อยู่ในรูปสมการเมตริกซ์ได้ดังสมการ (21)

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} V_{qs}^s \\ V_{ds}^s \\ V_{qr}^s \\ V_{dr}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{qs} & 0 & -\omega_r L_{qsqr} \sin\theta_r & -\omega_r L_{qsdr} \cos\theta_r \\ 0 & r_{ds} & \omega_r L_{dsqr} \cos\theta_r & -\omega_r L_{dsdr} \cos\theta_r \\ -\omega_r L_{qrqs} \sin\theta_r & -\omega_r L_{drdr} \cos\theta_r & r_r & 0 \\ -\omega_r L_{qrqs} \cos\theta_r & -\omega_r L_{drdr} \cos\theta_r & 0 & r_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qs}^s \\ i_{ds}^s \\ i_{qr}^s \\ i_{dr}^s \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} L_{qsqs} & 0 & L_{qsqr} \cos\theta_r & -L_{qsqr} \sin\theta_r \\ 0 & L_{dsds} & L_{dsdr} \sin\theta_r & L_{dsdr} \cos\theta_r \\ L_{qrqs} \cos\theta_r & L_{drdr} \sin\theta_r & L_{qsqr} & 0 \\ -L_{drqs} \sin\theta_r & L_{drds} \cos\theta_r & 0 & L_{drdr} \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} i_{qs}^s \\ i_{ds}^s \\ i_{qr}^s \\ i_{dr}^s \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

สมการ (21) สามารถหาค่าความสัมพันธ์ของค่าแรงดัน กระแส ความต้านทาน และจำนวนรอบของขดลวดแต่ละชุดเมื่อย้ายตัวแปรบนแกน dq ของโรเตอร์ไปอยู่บนแกน dq ของสเตเตอร์ กำหนดให้

N_{qs} คือ จำนวนรอบของขดลวดหลัก (Main winding)

N_{ds} คือ จำนวนรอบของขดลวดช่วย (Auxiliary winding)

$N_{qr} = N_{dr} = N_r$ คือ จำนวนรอบของขดลวดโรเตอร์

และค่าที่มีตัวยก " ' " หมายถึงค่าที่ย้ายมาอยู่บนแกนอ้างอิง q ของสเตเตอร์

$$\begin{aligned}
 V'_{ds} &= \frac{N_{qs}}{N_{ds}} V_{ds} & , & \quad i'_{ds} = \frac{N_{qs}}{N_{ds}} i_{ds} \\
 L_{mq} &= N_{qs}^2 P_g & , & \quad L'_{ds} = \left(\frac{N_{qs}}{N_{ds}}\right)^2 N_{ds}^2 P_g = L_{mq} \\
 L'_{lds} &= \left(\frac{N_{qs}}{N_{ds}}\right)^2 L_{lds} & , & \quad r'_{ds} = \left(\frac{N_{qs}}{N_{ds}}\right)^2 r_{ds} \\
 L'_{lr} &= \left(\frac{N_{qs}}{N_r}\right)^2 L_{lr} & , & \quad r'_{r} = \left(\frac{N_{qs}}{N_r}\right)^2 r_r \\
 V'_{qr} &= \frac{N_{qs}}{N_r} V_{qr}^s & , & \quad V'_{dr} = \frac{N_{qs}}{N_r} V_{dr}^s \\
 i'_{qr} &= \frac{N_r}{N_{qs}} i_{qr}^s & , & \quad i'_{dr} = \frac{N_r}{N_{qs}} i_{dr}^s
 \end{aligned}$$

สามารถเปลี่ยนค่าความเหนี่ยวนำระหว่างขดลวดแต่ละชุดเป็นค่าความเหนี่ยวนำแม่เหล็ก (magnetic inductance) ด้วยความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้ (Ong, 1998)

$$\begin{aligned}
 L_{qsqs} &= L_{lqs} + N_{qs}^2 P_g & , & \quad L_{dsds} = L_{lds} + N_{ds}^2 P_g \\
 L_{qsqr} &= N_{qs} N_{qr} P_g & , & \quad L_{qsdr} = N_{qs} N_{dr} P_g \\
 L_{dsqr} &= N_{ds} N_{qr} P_g & , & \quad L_{dsdr} = N_{ds} N_{dr} P_g \\
 L_{qrqr} &= L_{lqr} + N_{qr}^2 P_g & , & \quad L_{drdr} = L_{ldr} + N_{dr}^2 P_g
 \end{aligned}$$

แทนค่าต่างๆ ลงในสมการ (21) โดยพิจารณาให้จำนวนรอบของขดลวดเท่ากัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} V_{qs}^s \\ V_{ds}^s \\ V_{qr}^s \\ V_{dr}^s \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r_{qs} & 0 & -\omega_r L_{mqs} \sin\theta_r & -\omega_r L_{mqs} \cos\theta_r \\ 0 & r'_{ds} & \omega_r L_{mqs} \cos\theta_r & -\omega_r L_{mqs} \cos\theta_r \\ -\omega_r L_{mqs} \sin\theta_r & \omega_r L_{mqs} \cos\theta_r & r'_r & 0 \\ -\omega_r L_{mqs} \cos\theta_r & -\omega_r L_{mqs} \cos\theta_r & 0 & r'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{qr} \\ i_{dr} \end{bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} L'_{lqs} + L_{mqs} & 0 & L_{mqs} \cos\theta_r & -L_{mqs} \sin\theta_r \\ 0 & (L'_{lqs} + L_{mqs}) & L_{mqs} \sin\theta_r & L_{mqs} \cos\theta_r \\ L_{mqs} \cos\theta_r & L_{mqs} \sin\theta_r & (L'_r + L_{mqs}) & 0 \\ -L_{mqs} \sin\theta_r & L_{mqs} \cos\theta_r & 0 & (L'_r + L_{mqs}) \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{qr} \\ i_{dr} \end{bmatrix} \tag{22}
 \end{aligned}$$

และสามารถจัดให้อยู่ในรูปสมการสเตตได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt} [i] = [A][i] + [B][v] \tag{23}$$

$$[i] = [i_{qs} \quad i'_{ds} \quad i'_{qr} \quad i'_{dr}]^T$$

$$[v] = [V_{qs} \quad V'_{ds} \quad V'_{qr} \quad V'_{dr}]^T$$

$$[A] = [D]^{-1}[C]$$

$$[B] = [D]^{-1}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} -r_{qs} & 0 & \omega_r L_{mqs} \sin \theta_r & \omega_r L_{mqs} \cos \theta_r \\ 0 & -r'_{ds} & -\omega_r L_{mqs} \cos \theta_r & \omega_r L_{mqs} \sin \theta_r \\ \omega_r L_{mqs} \sin \theta_r & -\omega_r L_{mqs} \cos \theta_r & -r'_r & 0 \\ \omega_r L_{mqs} \cos \theta_r & \omega_r L_{mqs} \sin \theta_r & 0 & -r'_r \end{bmatrix}$$

และ

$$[D] = \begin{bmatrix} L'_{lqs} + L_{mqs} & 0 & L_{mqs} \cos \theta_r & -L_{mqs} \sin \theta_r \\ 0 & (L'_{lds} + L_{mqs}) & L_{mqs} \sin \theta_r & L_{mqs} \cos \theta_r \\ L_{mqs} \cos \theta_r & L_{mqs} \sin \theta_r & (L'_{lr} + L_{mqs}) & 0 \\ -L_{mqs} \sin \theta_r & L_{mqs} \cos \theta_r & 0 & (L'_{lr} + L_{mqs}) \end{bmatrix}$$

เมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่ของโรเตอร์ โดยใช้กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน (Krishnan, 2001) สมการเชิงกลอาจเขียนแสดงได้ดังนี้

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{P}{2J_m} T_e(t) - \frac{P}{2J_m} T_L(t) - \frac{B_m \omega_r(t)}{J_m}$$

เมื่อ T_e คือแรงบิดทางแม่เหล็กไฟฟ้า (Electromagnetic Torque)

$$T_e = \left(\frac{P}{2} \right) L_{mqs} i_{qs} (-i_{qs} \sin \theta_r - i'_{dr} \cos \theta_r) + L_{mqs} i'_{ds} (i'_{qr} \cos \theta_r - i'_{dr} \sin \theta_r)$$

และ $\frac{d\theta_r}{dt} = \omega_r$

จัดให้อยู่ในรูปสมการสเตต

$$\begin{bmatrix} \frac{d\omega_r}{dt} \\ \frac{d\theta_r}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B_m}{J_m} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_r \\ \theta_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{P}{2J_m} \\ 0 \end{bmatrix} [T_e - T_L] \quad (24)$$

เมื่อรวมแบบจำลองปริภูมิสเตตสถานะของทั้งทางไฟฟ้าและทางกลเข้าด้วยกันจะได้แบบจำลองปริภูมิสเตตสถานะของมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสสลับชนิดเหนี่ยวนำแบบหนึ่งเฟสดังนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{d[i]_{4 \times 1}}{dt} \\ \frac{d\omega_r}{dt} \\ \frac{d\theta_r}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathfrak{R}]_{4 \times 4} & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & -\frac{B}{J_m} & 0 \\ \vdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

โดยที่

$$[i]_{4 \times 1} = [i_{qs} \quad i'_{ds} \quad i'_{qr} \quad i'_{dr}]^T$$

$$[R]_{4 \times 4} = [A] = [D]^{-1}[C]$$

$$[K]_{4 \times 4} = [B] = [D]^{-1}$$

2. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการต่อขนานมอเตอร์ n ตัว

ตามที่ได้นำเสนอการพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของมอเตอร์เหนี่ยวนำหนึ่งเฟสโดยใช้วิธีการแปลงแกน ในการวิจัยนี้ได้นำมาพัฒนาเพื่อให้ได้แบบจำลองสำหรับการขนานมอเตอร์หลายๆ ตัวที่ใช้อุปกรณ์ขับเคลื่อนเพียงชุดเดียว การพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการต่อขนานมอเตอร์หลายๆ ตัวนี้ จะอาศัยหลักการถ่ายโอนแกนเหมือนการพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับมอเตอร์ตัวเดียว โดยจะพิจารณาระบบที่ประกอบไปด้วย มอเตอร์เหนี่ยวนำที่มีขดลวด 3 ชุด คือ ขดลวดหลัก ขดลวดช่วย และขดลวดที่โรเตอร์ นำมาต่อขนานกันหลายๆ ตัวรับพลังงานจากแหล่งจ่ายเพียงชุดเดียวดังแสดงใน Figure 3 จากสมการ (26) จะได้สมการที่เป็นแบบจำลองทางพลวัตของมอเตอร์เหนี่ยวนำหนึ่งเฟสซึ่งสามารถนำมาวิเคราะห์และพัฒนาให้เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการขนานมอเตอร์เหนี่ยวนำหนึ่งเฟสหลายตัว สมการที่ได้จะอยู่ในรูปสมการปริภูมิสถานะ ดังสมการ (27) ซึ่งแสดงตัวอย่างการขนานมอเตอร์ 2 ตัว ในสมการจะเห็นได้ว่าเมตริกซ์ $[V]$ มีขนาด 4 แถว 1 หลัก ที่อยู่ทางด้านขวาสุดของสมการปริภูมิสถานะในมอเตอร์ตัวที่ 1 และตัวที่ 2 นั้นจะเป็นชุดเมตริกซ์ชุดเดียวกัน จากวิธีนี้สามารถนำมาพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการขนานมอเตอร์เหนี่ยวนำหลายๆ ตัวหรือ n ตัวที่มีแหล่งจ่ายแรงดันแหล่งเดียวกันได้ดังแสดงในสมการ (28) โดยที่

$$[A_n] = \begin{bmatrix} i_{qsn} \\ i'_{dsn} \\ i'_{qrn} \\ i'_{drn} \\ \omega_{rn} \\ \theta_{rn} \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad [\Theta_n] = \begin{bmatrix} V_{qsn} \\ V'_{dsn} \\ V'_{qrn} \\ V'_{drn} \\ T_e - T_L \\ 0 \end{bmatrix}$$

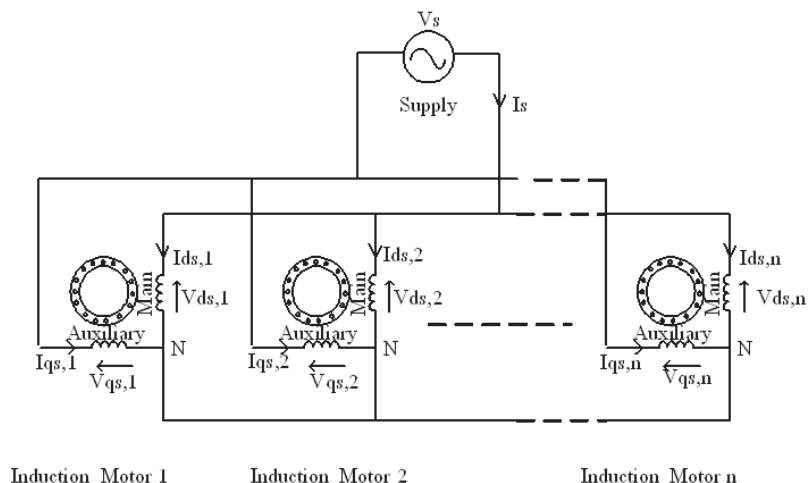


Figure 3. Schematic diagram for a group of n parallel motors

สมการที่ 26

$$\begin{bmatrix} \frac{d[i]_{4 \times 1}}{dt} \\ \frac{d\omega_r}{dt} \\ \frac{d\theta_r}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{R}_{11} & \mathfrak{R}_{12} & \mathfrak{R}_{13} & \mathfrak{R}_{14} & 0 & 0 \\ \mathfrak{R}_{21} & \mathfrak{R}_{22} & \mathfrak{R}_{23} & \mathfrak{R}_{24} & 0 & 0 \\ \mathfrak{R}_{31} & \mathfrak{R}_{32} & \mathfrak{R}_{33} & \mathfrak{R}_{34} & 0 & 0 \\ \mathfrak{R}_{41} & \mathfrak{R}_{42} & \mathfrak{R}_{43} & \mathfrak{R}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{B_m}{J_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [i]_{4 \times 1} \\ \omega_r \\ \theta_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathfrak{N}_{11} & \mathfrak{N}_{12} & \mathfrak{N}_{13} & \mathfrak{N}_{14} & 0 & 0 \\ \mathfrak{N}_{21} & \mathfrak{N}_{22} & \mathfrak{N}_{23} & \mathfrak{N}_{24} & 0 & 0 \\ \mathfrak{N}_{31} & \mathfrak{N}_{32} & \mathfrak{N}_{33} & \mathfrak{N}_{34} & 0 & 0 \\ \mathfrak{N}_{41} & \mathfrak{N}_{42} & \mathfrak{N}_{43} & \mathfrak{N}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{p}{2J_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [V]_{4 \times 1} \\ T_e - T_L \\ 0 \end{bmatrix}$$

สมการที่ 27

$$\begin{bmatrix} \frac{d[i_1]_{4 \times 1}}{dt} \\ \frac{d\omega_{r1}}{dt} \\ \frac{d\theta_{r1}}{dt} \\ \frac{d[i_2]_{4 \times 1}}{dt} \\ \frac{d\omega_{r2}}{dt} \\ \frac{d\theta_{r2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{R}1_{11} & \mathfrak{R}1_{12} & \mathfrak{R}1_{13} & \mathfrak{R}1_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathfrak{R}1_{21} & \mathfrak{R}1_{22} & \mathfrak{R}1_{23} & \mathfrak{R}1_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathfrak{R}1_{31} & \mathfrak{R}1_{32} & \mathfrak{R}1_{33} & \mathfrak{R}1_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathfrak{R}1_{41} & \mathfrak{R}1_{42} & \mathfrak{R}1_{43} & \mathfrak{R}1_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{B_{m1}}{J_{m1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{R}2_{11} & \mathfrak{R}2_{12} & \mathfrak{R}2_{13} & \mathfrak{R}2_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{R}2_{21} & \mathfrak{R}2_{22} & \mathfrak{R}2_{23} & \mathfrak{R}2_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{R}2_{31} & \mathfrak{R}2_{32} & \mathfrak{R}2_{33} & \mathfrak{R}2_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{R}2_{41} & \mathfrak{R}2_{42} & \mathfrak{R}2_{43} & \mathfrak{R}2_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{B_{m2}}{J_{m2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [i_1]_{4 \times 1} \\ \omega_{r1} \\ \theta_{r1} \\ [i_2]_{4 \times 1} \\ \omega_{r2} \\ \theta_{r2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{N}1_{11} & \mathfrak{N}1_{12} & \mathfrak{N}1_{13} & \mathfrak{N}1_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathfrak{N}1_{21} & \mathfrak{N}1_{22} & \mathfrak{N}1_{23} & \mathfrak{N}1_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathfrak{N}1_{31} & \mathfrak{N}1_{32} & \mathfrak{N}1_{33} & \mathfrak{N}1_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathfrak{N}1_{41} & \mathfrak{N}1_{42} & \mathfrak{N}1_{43} & \mathfrak{N}1_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{p_1}{2J_{m1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{N}2_{11} & \mathfrak{N}2_{12} & \mathfrak{N}2_{13} & \mathfrak{N}2_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{N}2_{21} & \mathfrak{N}2_{22} & \mathfrak{N}2_{23} & \mathfrak{N}2_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{N}2_{31} & \mathfrak{N}2_{32} & \mathfrak{N}2_{33} & \mathfrak{N}2_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{N}2_{41} & \mathfrak{N}2_{42} & \mathfrak{N}2_{43} & \mathfrak{N}2_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{p_2}{2J_{m2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [V]_{4 \times 1} \\ T_e + T_{L1} \\ 0 \\ [V]_{4 \times 1} \\ T_e + T_{L2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

สมการที่ 28

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} [\Lambda_1] \\ [\Lambda_2] \\ [\Lambda_3] \\ \vdots \\ [\Lambda_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R1]_{4 \times 4} & [0]_{4 \times 4} & [0]_{4 \times 4} & \cdots & [0]_{4 \times 4} \\ [0]_{4 \times 4} & [R2]_{4 \times 4} & [0]_{4 \times 4} & \cdots & [0]_{4 \times 4} \\ [0]_{4 \times 4} & [0]_{4 \times 4} & [R3]_{4 \times 4} & \vdots & [0]_{4 \times 4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0]_{4 \times 4} & [0]_{4 \times 4} & [0]_{4 \times 4} & \cdots & [Rn]_{4 \times 4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Lambda_1] \\ [\Lambda_2] \\ [\Lambda_3] \\ \vdots \\ [\Lambda_n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [N1]_{4 \times 4} & [0]_{4 \times 4} & [0]_{4 \times 4} & \cdots & [0]_{4 \times 4} \\ [0]_{4 \times 4} & [N2]_{4 \times 4} & [0]_{4 \times 4} & \cdots & [0]_{4 \times 4} \\ [0]_{4 \times 4} & [0]_{4 \times 4} & [N3]_{4 \times 4} & \vdots & [0]_{4 \times 4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0]_{4 \times 4} & [0]_{4 \times 4} & [0]_{4 \times 4} & \cdots & [Nn]_{4 \times 4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Theta_1] \\ [\Theta_2] \\ [\Theta_3] \\ \vdots \\ [\Theta_n] \end{bmatrix}$$

การจำลองผล

การจำลองผลดำเนินการด้วยโปรแกรมพัฒนาขึ้นด้วย MATLAB โดยเริ่มจากการรับค่าพารามิเตอร์ของมอเตอร์แต่ละตัว และกำหนดค่าเริ่มต้นต่างๆ ของมอเตอร์ หลังจากนั้นก็จะเป็นการคำนวณเชิงตัวเลข เพื่อหาค่าตัวแปรต่างๆ ของสมการ จากนั้นนำมาหาค่าแรงบิดและความเข้มสนามแม่เหล็กเชื่อมโยงตามลำดับ ในการทดสอบจำลองผลการขนานมอเตอร์ 3 ตัว แบ่งการจำลองผลออกเป็น 4 สภาวะด้วยกัน ได้แก่

- สภาวะ 1** กำหนดให้พารามิเตอร์และภาวะของมอเตอร์แต่ละตัวเท่ากัน โดยมอเตอร์ทุกตัวมีพารามิเตอร์เท่ากับตัวที่ 1
 - มอเตอร์ 1: พารามิเตอร์ชุดที่ 1, แรงบิดของโหลดตัวที่ 1
 - มอเตอร์ 2: พารามิเตอร์ชุดที่ 1, แรงบิดของโหลดตัวที่ 1
 - มอเตอร์ 3: พารามิเตอร์ชุดที่ 1, แรงบิดของโหลดตัวที่ 1
- สภาวะ 2** กำหนดให้พารามิเตอร์ของมอเตอร์เท่ากันทุกตัวแต่ภาวะแตกต่างกัน โดยมอเตอร์ทุกตัวมีพารามิเตอร์เท่ากับตัวที่ 1
 - มอเตอร์ 1: พารามิเตอร์ชุดที่ 1, แรงบิดของโหลดตัวที่ 1
 - มอเตอร์ 2: พารามิเตอร์ชุดที่ 1, แรงบิดของโหลดตัวที่ 2
 - มอเตอร์ 3: พารามิเตอร์ชุดที่ 1, แรงบิดของโหลดตัวที่ 3
- สภาวะ 3** กำหนดให้พารามิเตอร์แตกต่างกันและภาวะของมอเตอร์แต่ละตัวเท่ากัน
 - มอเตอร์ 1: พารามิเตอร์ชุดที่ 1, แรงบิดของโหลดตัวที่ 1
 - มอเตอร์ 2: พารามิเตอร์ชุดที่ 2, แรงบิดของโหลดตัวที่ 1
 - มอเตอร์ 3: พารามิเตอร์ชุดที่ 3, แรงบิดของโหลดตัวที่ 1
- สภาวะ 4** กำหนดให้พารามิเตอร์และภาวะของมอเตอร์แต่ละตัวแตกต่างกัน
 - มอเตอร์ 1: พารามิเตอร์ชุดที่ 1, แรงบิดของโหลดตัวที่ 1
 - มอเตอร์ 2: พารามิเตอร์ชุดที่ 2, แรงบิดของโหลดตัวที่ 2
 - มอเตอร์ 3: พารามิเตอร์ชุดที่ 3, แรงบิดของโหลดตัวที่ 3

ขนาดแรงบิดของโหลดที่เป็นปั๊มหอยโข่ง 3 ตัว ซึ่งมีสมการของความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดกับความเร็วเป็นดังนี้ $T = k\omega^2$

แรงบิดของโหลดตัวที่ 1: $1.8 \times 10^{-4} \omega_r^2$ N.m

แรงบิดของโหลดตัวที่ 2: $9.5 \times 10^{-5} \omega_r^2$ N.m

แรงบิดของโหลดตัวที่ 3: $7.5 \times 10^{-5} \omega_r^2$ N.m

การจำลองผลจะใช้ค่าพารามิเตอร์สำหรับมอเตอร์แต่ละตัวดังแสดงใน Table 1 นี้ (Mademlis, 2005; Rahim, 2002) โดยแหล่งจ่ายพลังงานที่ให้แก่มอเตอร์จะควบคุมแรงดันให้มีขนาด 220V และความถี่ 50Hz คงที่อยู่ตลอดเวลาด้วยอินเวอร์เตอร์เพียงชุดเดียว (Kono *et al.*, 2000) ในการจำลองผลสภาวะต่างๆ 4 สภาวะนั้น ภาระที่ใช้เป็นปั๊มหอยโข่ง 8 ตัวที่มีขนาดเท่ากันและแตกต่างกันตามสภาวะการทดลอง ผลที่ได้แสดงตัวอย่างสภาวะที่ 4 เป็นดังใน Figure 4-9 นี้

อภิปรายผล

จากการจำลองผลแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้พัฒนาขึ้นสำหรับการขนานมอเตอร์เหนี่ยวนำชนิดหนึ่งเฟสหลายๆ ตัว โดยรับพลังงานจากแหล่งจ่ายที่ควบคุมด้วยอินเวอร์เตอร์เพียงชุดเดียว ผลที่ได้แสดงใน Figure 4-9

เป็นตัวอย่างผลการทดสอบในสภาวะที่ 4 จะเห็นได้ว่าเมื่อมอเตอร์เริ่มขับโหลดจะมีการดึงกระแสในช่วงแรกๆ ก่อน จะเข้าสู่สภาวะคงตัว สอดคล้องกับความเร็วของมอเตอร์ โดยสังเกตได้จากเวลาที่กระแสและความเร็วของมอเตอร์เข้าสู่สภาวะคงตัวมีค่าเท่ากัน ไม่ว่าจะการทดสอบจะมีการเปลี่ยนแปลงโหลดที่แตกต่างกันทั้ง 4 สภาวะ (Correa *et al.*, 1999) ผลที่ได้ยังคงมีความสอดคล้องกัน จากการทดสอบแบบจำลองในสภาวะต่างๆ ที่ได้กล่าวมาแล้วนั้น แสดงให้เห็นว่า แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของมอเตอร์เหนี่ยวนำชนิดหนึ่งเฟสต่อขนานกัน n ตัวที่ได้พัฒนาขึ้นสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในงานต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม

สรุปและข้อเสนอแนะ

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของมอเตอร์เหนี่ยวนำชนิดหนึ่งเฟสต่อขนานกัน n ตัวที่ได้นำเสนอในบทความนี้เป็นแบบจำลองที่อยู่ในรูปของสมการปริภูมิสแตตที่ง่ายแก่การนำไปประยุกต์ใช้ประโยชน์ในงานที่มีมอเตอร์เหนี่ยวนำชนิดหนึ่งเฟสทั้งแบบตัวเดียว และ n ตัว ซึ่งผลที่ได้จากการจำลองผลด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในสภาวะต่างๆ มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี

Table 1. Motor parameters (11)-(13)

Parameter set	poles	r_{qs} (Ω)	r'_{ds} (Ω)	r'_r (Ω)	L_{mqs} (Ω)	L_{lr} (Ω)	L_{lqs} (Ω)	L_{lds} (Ω)	J (kg.m ²)	B_m (N.m/rad/sec)
1	4	4.3	2.6	2.01	105	1.8	1.01	1.8	0.0546	0.0002
2	4	1.3	2.6	2.01	105	2.8	2.01	2.8	0.0546	0.0002
3	4	3.2	7.2	2.00	54.97	3.2	3.61	2.09	0.0546	0.0002

Table 2. Steady-state performance of each test case

	Case 1			Case 2			Case 3			Case 4		
	M1	M2	M3	M1	M2	M3	M1	M2	M3	M1	M2	M3
Supply Current (A _{rms})		25.44			17.48			32.42			22.07	
Motor Current (A _{rms})	8.48	8.48	8.48	8.48	4.85	4.15	8.48	10.09	13.85	8.48	5.91	7.68
Motor Speed (rpm)	1402	1402	1402	1402	1450	1461	1402	1408	1370	1402	1452	1455
Load Torque (N.m)	14.27	14.27	14.27	14.27	7.78	6.14	14.27	14.46	17.74	14.27	9.33	8.62
Motor Slip	0.065	0.065	0.065	0.065	0.033	0.026	0.065	0.061	0.086	0.065	0.032	0.030

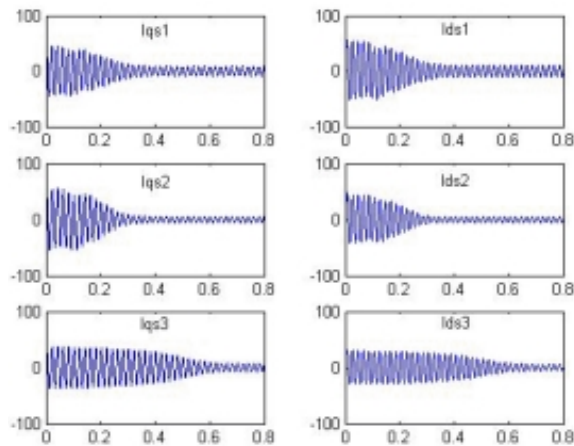


Figure 4. Stator currents (A) of case 4

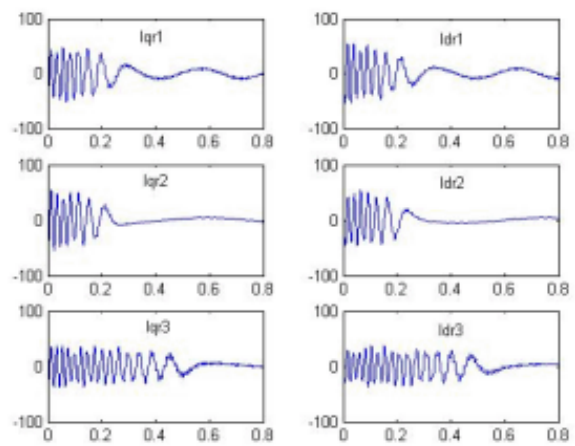


Figure 5. Rotor currents (A) of case 3

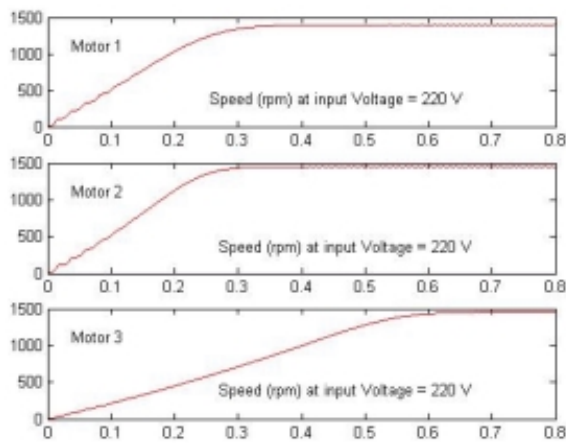


Figure 6. Motor speeds (rpm) of case 4

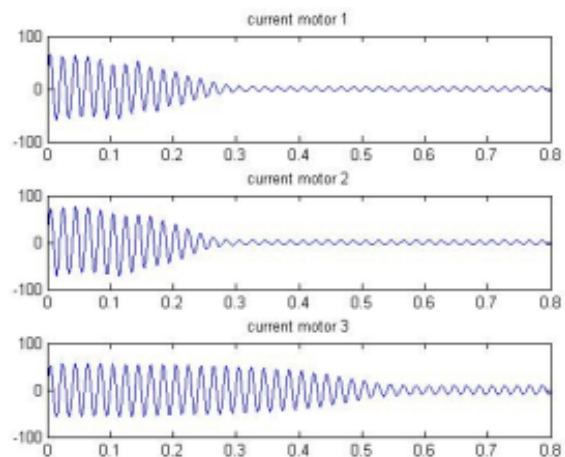


Figure 7. Rotor currents (A) of case 4

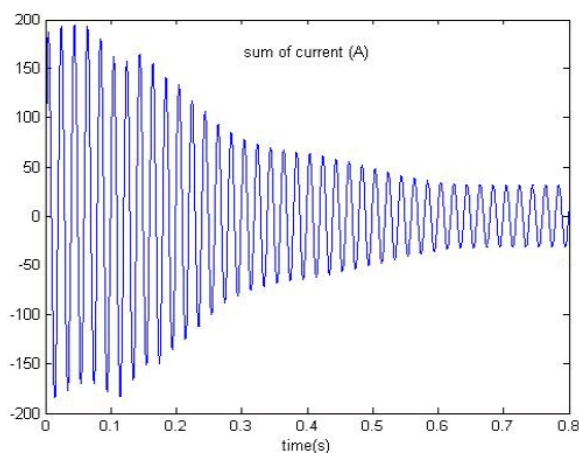


Figure 8. Currents (A) of the motor group of case 4

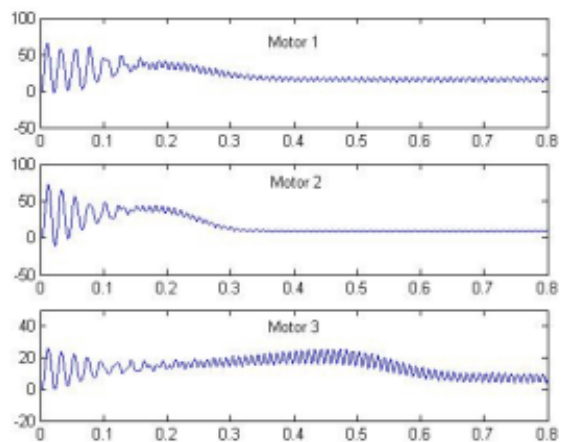


Figure 9. Motor torques (N.m) of case 4

เอกสารอ้างอิง

- Chee-Mun ong. 1998. Dynamic Simulation of Electric machinery using MATLAB/SIMULINK, Prentice Hall.
- Correa, M.B.R., Jacobina, C.B., Lima, A.M.N. and da Silva, E.R.C. 1999. Single-phase induction motor Drives systems, IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC'99), Vol. 1: 403-409.
- Correa, M.B.R., Jacobina, C.B., Lima, A.M.N. and da Silva, E.R.C. 2004. Vector control strategies for single-phase induction motor drive systems, IEEE Trans. IA, 51(5): 1073-1080.
- Jang, D.H. Voltage, frequency, and phase-difference angle control of PWM inverters-fed two-phase induction motors, IEEE Trans. PE, 9(4): 377-383.
- Kono, Y., Fushimi, T., and Matsuse K. 2000. Speed Senseless Vector Control of Parallel Connected Induction Motors, Proc. PIEMC' 2000, 2000: 278-283.
- Krause, P.C., Wasynczuk, O. and Sudhoff, S.D. 1995. Analysis of Electrical Machinery, Piscataway, Nj; IEEE Press.
- Krishnan, R. 2001. Electric Motor Drives Modeling, Analysis and Control, Prentice Hall.
- Mademlis, C., Kioskeridis, I., and Theodoulidis, T. 2005. Optimization of single-phase induction motors-Part I: maximum energy efficiency control, IEEE Trans. EC, 20(1): 187-195.
- Matsuse, K., Kouno, Y., Kawai, H. and Oikawa, J. 2004. Characteristics of speed sensorless vector controlled dual induction motor drive connected in parallel fed by a single inverter, IEEE Trans. IA, 40(1): 153-161.
- Matsumoto, Y. Ozaki, S. and Kawamura, A. 2001. A novel vector control of single-inverter multiple-induction-motors drives for Shinkansen traction system, IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC'2001.), 1: 608-614.
- Rahim, N.A. 2002. Operating of Single-Phase Induction Motor as Two-Phase Motor, IEEE Trans. IA, 38(6): 1566-1571.

Notation List

- B_m viscous friction coefficient (Nm/rad/sec)
 $i_{qs}, i_{ds}, i_{qr}, i_{dr}$ the q- axis and the d- axis current components of stator and rotor (A)
 J moment of inertia (Kg -m2)
 $N_{qs}, N_{ds}, N_{qr}, N_{dr}$ winding turns on the q-axis and the d-axis of stator and rotor
 L_{lqs} leakage inductance of the stator main winding (H)
 L_{lds} leakage inductance of the stator auxiliary winding (H)
 L_{lr} leakage inductance on the rotor winding (H)
 L_{mq}, L_{md} mutual inductances on the d- and the q-axes (H)
 L_{qsqs} self inductance on the stator q-axis (H)
 L_{qsds} cross inductance between the stator q- and d-axes (H)
 L_{qsqr} cross inductance between the stator q-axis and the rotor q-axis (H)
 L_{qsdr} cross inductance between the stator q-axis and the rotor d-axis (H)
 L_{dsds} self inductance on the stator d-axis (H)
 L_{dsqr} cross inductance between the stator d-axis and the rotor q-axis (H)
 L_{dsdr} cross inductance between the stator d-axis and the rotor d-axis (H)
 p $\frac{d}{dt}$
 P number of poles (pole)
 P_g permeance of airgap
 $r_{qs}, r_{ds}, r_{qr}, r_{dr}$ the q-axis and the d-axis resistance components of stator and rotor (Ω)
 T_e electromagnetic torque (Nm)
 T_L load torque (Nm)
 $V_{qs}, V_{ds}, V_{qr}, V_{dr}$ the q-exes and d-exes voltage components on stator and rotor(V)
 ω_r speed (rad/s)
 θ_r phase difference between the and axes (rad)
 superscript S denotes stator-side quantities
 superscript r denotes rotor-side quantities
 superscript ' denotes transformed quantities to the reference q- axis of the stator